现代数学基础丛书 156

线性算子的谱分析

（第二版）

孙 炯　王 忠　王万义　编著

科学出版社

现代数学基础丛书 156

线性算子的谱分析

（第二版）

孙　炯　王　忠　王万义　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书从有限维空间线性算子的特征值出发，采用类比、归纳等方式，通过大量实例循序渐进地引入无穷维空间上线性算子的谱理论，系统介绍并分析了有界线性算子、共轭算子、正常算子、自共轭算子、紧算子的结构，讨论了上述这些有界线性算子的谱点分类、谱集的性质和谱分解定理. 进而对闭的线性算子、无界线性算子，特别是在近代物理学、量子力学中有着深刻应用背景的微分算子的结构、亏指数、自共轭扩张和它们的谱分解加以分析.

本书适合数学、应用数学以及其他相关的理工科研究生阅读，可供专门从事泛函分析、线性算子谱理论、微分算子理论研究的数学工作者使用，也可供从事偏微分方程、非线性科学和量子力学的科学工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性算子的谱分析/孙炯，王忠，王万义编著. —2 版. —北京：科学出版社，2015.6

(现代数学基础丛书 156)

ISBN 978-7-03-045054-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙… ②王… ③王… Ⅲ. ①线性算子—谱分析(数学) Ⅳ. ①O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 131498 号

责任编辑：王丽平／责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2005 年 9 月第 一 版　开本：720 × 1000 B5
2015 年 6 月第 二 版　印张：21 1/4
2015 年 6 月第二次印刷　字数：430 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

《线性算子的谱分析》出版以来, 得到了读者, 特别是从事谱理论研究的数学工作者的肯定, 同时他们也对本书提出了许多宝贵的改进意见, 本书在作为研究生教材讲授时, 我们也发现有不少需要修改和完善的地方. 第一版出版十年后的今天, 我们很高兴本书有机会再版.

作为一本数学专业书籍, 我们更希望读者能从中理解数学研究的本源, 数学发现的源动力, 而不是仅仅学会从定义和定理推导出的一组结论. 作为一种尝试, 本书的第二版我们在最前面加上了一节绪论“从矩阵的特征值到无穷维空间的谱理论”, 从线性代数、数学分析和微分方程中的一些实例中, 使用类比、联想、归纳等数学方法, 引申、抽象出本书要研究的问题. 我们认为对最基本、最简单数学结构的感悟与理解是学会数学、学懂数学最为关键的一步.

本书的第二版除了对第一版的文字叙述和排版中的小错误做了仔细的修订和完善外, 在 5.6 节微分算子的辛结构, 结合我们近期的研究工作增加了部分内容. 孙炯负责第一章到第四章的修订和统稿, 王万义、王忠分别负责第五章、第六章的修订, 内蒙古大学郝晓玲、姚斯琴等教师和研究生也对本书的修订再版做了很多具体的工作. 本书的三位作者多年来在国家自然科学基金的支持下, 在微分算子谱理论方面从事研究工作, 本书的出版受到了国家自然科学基金的资助, 我们在这里表示由衷的谢意! 在出版过程中, 我们得到了科学出版社以及王丽平编辑的大力支持, 在此谨向他们表示衷心的感谢!

囿于学识, 本书虽经修订, 错误和缺陷仍然在所难免, 希望读者不吝赐教.

孙 炯　王 忠　王万义
2015 年 1 月于呼和浩特

第一版前言

要想获得真理和知识, 唯有两件武器, 那就是清晰的知觉和严格的演绎.

——笛卡儿 (Descartes)

运算永远是数学研究的重要对象. 线性算子理论将微分、积分等在近代数学中最为基本的运算手段, 抽象为建立在空间上的映射关系, 并加以统一处理. 线性算子的谱理论从结构上剖析了算子作用的本质特征, 它的处理方式体现了数学结构在分析、代数和几何上的和谐与统一. 本书以谱分析为主线, 对一些最基本的线性算子的结构进行了分析和阐述. 作者设定的目标有两个, 一是使本书有很好的可读性, 二是努力展现数学内在的美学结构. 数学美感在数学创造中往往能给人以意想不到的启迪.

作者遵循从有限维空间线性算子特征值引入无穷维空间上线性算子谱理论的基本思路, 详细介绍和分析了有界线性算子、共轭算子、正常算子、自共轭算子、紧算子的结构, 在此基础上给出了这些有界线性算子的谱点分类、谱集合的性质和谱分解定理. 进而对闭的线性算子、无界线性算子, 特别是在近代物理学、量子力学中有着深刻应用背景的微分算子的结构、亏指数、自共轭扩张及其谱分解加以研究. 为了给出空间按照线性算子的特征进行的几何分解和线性算子的谱积分、谱表示, 本书首先详尽地分析了最简单的谱积分 (级数形式)—— 投影算子加权和的谱理论, 使读者能够从简单中了解复杂, 从个性中理解共性, 从具体实例中感悟抽象的线性算子谱分解、谱积分的具体真实意义, 感受到数学结构的美学含义. 本书撰写时注重可读性, 选材系统, 循序渐进, 前后呼应. 有兴趣的读者 (包括理工科的研究生) 甚至可以通过自学前四章来了解线性算子和谱分解的基本理论.

对最基本、最简单数学结构的感悟与理解是学会数学、学懂数学最为关键的一步. 线性算子理论是深刻反映许多数学问题本质的数学分支, 有着十分广泛的应用背景, 同时它可以用十分抽象的数学语言来加以概括和描述. 但是本书并不准备一开始就给出抽象的谱族和谱积分的概念, 而是采用类比、归纳等思维方式, 循序渐进地引入较为抽象的谱理论. 书中包含很多的例子, 作者在大量的实例中系统地介绍了线性算子及其谱分析的基本理论, 有助于从线性算子的结构上, 十分简洁地了解它的作用形式和作用结果, 为读者感悟线性算子及其谱理论的基本概念和定理提供了切实的背景. 事实上, 数学不应当被想象为一种难懂而又违背常识的东西, 希

望读者看到的数学正是常识的精微化.

本书第一章介绍有界线性算子的基本理论, 为了全书的系统性, 前几节简要介绍了 Banach 空间、Hilbert 空间和线性算子的基本概念和性质. 第二章讨论有界线性算子的谱, 特别是投影算子的加权和、有界自共轭算子、紧算子的谱, 在此基础上引出了谱族和谱积分的概念以及有界算子的谱分解. 第三章从闭算子开始, 研究无界线性算子的共轭算子、对称算子的结构、亏指数、Cayley 变换和自共轭扩张. 第四章专门讨论无界算子谱的性质和分布, 自共轭算子谱的非空性, 本质谱的分布以及无界自共轭算子、正常算子的谱族和谱表示. 从第五章开始, 把注意力放到微分算子上, 分别从不同的角度讨论一阶微分算子和它的共轭算子, 二阶的 Sturm-Liouville 算子以及高阶微分算子, 介绍了对称微分算子的自共轭扩张, 特别是带有中间亏指数微分算子的自共轭域的刻画和微分算子的辛结构. 最后一章介绍了微分算子的谱理论, 包括常系数的微分算子、Euler 算子、J 自共轭算子本质谱的范围和谱的离散性. 在本书的前四章各节末选配了大量的习题, 习题的一部分内容是为了加深对内容的理解, 提高分析问题、解决问题的能力, 另外一部分是对书中内容的补充.

无界线性算子理论特别是微分算子谱理论, 无论从纯数学还是从应用数学的角度都是十分重要的, 它为微分方程众多问题提供了统一的解决模式和理论框架. 微分算子理论的研究, 可追溯到 20 世纪初 H.Weyl 把经典的 Sturm-Liouville 问题推广到无穷区间, 1926 年 Schrödinger 方程的提出, 1932 年 John von Neumann 建立了量子力学的数学理论, 特别是无界自共轭算子的谱理论. 近几十年来 E.C. Titchmarsh, N. Levison, I. M. Glazman, M. A. Naimark, W. N. Everitt, D.E. Edmunds, A.Zettl 等国际著名数学家在微分算子理论方面作了大量的开拓性研究. 内蒙古大学微分算子讨论班 20 多年来始终坚持在这一方向上做研究工作, 承担了多项国家自然科学基金项目和内蒙古自然科学基金项目, 本书的写作基础是内蒙古大学微分算子研究集体科研工作的积累. 书中一些内容是作者及其内蒙古大学微分算子讨论班多年来取得的一些最新研究成果. 本书可以看成是曹之江的《常微分算子》专著的续篇. 由于作者的学识与能力有限, 书中的偏颇和不当之处在所难免, 希望同仁不吝赐教.

本书的第一章至第五章由孙炯执笔, 第六章由王忠执笔. 作者在写作过程中, 得到了曹之江教授的鼓励和指点, 这使作者能从更高的角度来审视和编排本书的原材料. 王爱平博士选编了全书的习题, 并且十分精细地完成了全书的排版和初校工作, 作者的一些研究生也帮助进行了部分打字和校对工作, 在这里向他们表示诚挚的感谢! 本书的出版得到了华夏英才基金会的资助, 得到了内蒙古自治区统战部的大力支持, 他们对科研著作出版的热忱使得本书得以出版, 作者向华夏英才基金会和内蒙古自治区统战部表示深深的谢意! 两位作者的妻子刘素华、刘冬玲和女儿们为作

者营造了温馨的家庭环境, 始终全力以赴地支持作者在事业上的努力, 谨以此书献给她们.

孙 炯 王 忠

2005 年 1 月于呼和浩特

目　　录

绪　　论
—— 从矩阵的特征值到线性算子的谱理论

数学研究问题的基本方法是把问题数量化、简单化, 用其数字特征来刻画问题的本源特性. 但是专业的数学书籍给读者的第一印象往往都是抽象而难懂. 我们认为：数学不应该成为一门让人费解的科学.

准确了解数学研究的原始动力 (为什么要研究这样的问题, 研究问题的来源和背景) 是十分重要的, 或者是说从一些简单的例子里, 去掉数学词汇的抽象、数学定理的外饰, 返璞归真是理解和学会数学基本方法. 绪论拟从线性代数、数学分析和微分方程中的一些实例展开, 引申、抽象出本书要研究的问题. 只有从实例才能感悟数学, 学会如何从问题中使用类比、联想等方法, 归纳出一些基本的数学思想方法, 进而去解决未知的问题. 对最基本、最简单数学结构的感悟与理解是学会数学、学懂数学最为关键的一步.

本书的书名中有两个关键词, 一是“线性算子”; 二是“谱”, 这两个词汇对于具有高等数学基础的读者来说可能是完全陌生的. 绪论的内容将从这两个关键词展开.

通俗地说, 线性算子就是一种线性运算, 或者称之为“映射”, 一个元素通过这种运算被转变成另一个元素.

运算始终是数学研究的基本对象. 高等数学中研究的主要对象微分、积分、矩阵都可以看成是运算, 并且都是线性运算. 即满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1(t)+x_2(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha x(t)=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t).$$

$$\int(x_1(t)+x_2(t))\mathrm{d}t=\int x_1(t)\mathrm{d}t+\int x_2(t)\mathrm{d}t,\quad \int\alpha x(t)\mathrm{d}t=\alpha\int x(t)\mathrm{d}t,$$

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2,$$

其中 $A_{n\times n}$ 是 n 维空间中的线性变换 (矩阵).

一般地, 把这样一些运算 T (连同其定义的范围) 称为算子, 满足条件

$$T(x+y)=Tx+Ty,\quad T(\alpha x)=\alpha Tx,\quad \forall x,y\in\mathfrak{D}(T) \tag{0.1.1}$$

的运算称为是线性算子, 其中 $\mathfrak{D}(T)$ 是 T 的定义域.

本书以线性变换、微分、积分这些具有线性性质的运算为应用背景, 来研究线性算子的谱理论, “谱”正是反映这种运算本质的数字特征. 对于 n 维空间中线性变换 A 来说, 这个线性算子的“谱”实际上就是我们在线性代数中熟知的“特征值”. 我们从下面的例子里来看矩阵的特征分解:

0.1.1　有限维空间矩阵运算的特征值

例 0.1.1　设 A 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的对称矩阵,

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix},\quad A:\ x\to\ Ax,\quad Ax=y,$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}^3$.

尽管矩阵中的数字很简单, 但是我们从直观上并不能看出这个线性运算 (线性变换) 的运算特征. 学过线性代数的读者知道, A 的运算特征是由它的特征值来确定, 并且:

(1) A 是对称的线性变换,

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2,\ \ (Ax_1,x_2)=(x_1,Ax_2),\ \ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^3;$$

(2) A 的特征值是实的;

(3) A 的属于不同特征值的特征向量相互正交;

(4) A 可以化为对角矩阵. 对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵.

具体做法为:

(i) 求解 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0$, $\lambda=2,-1$ 是特征值. 其中 $\lambda=2$ 是 A 的 2 重特征值, $\lambda=-1$ 是单重特征值.

(ii) $\lambda=2$ 时, 求出其基础解系如下:

$$\alpha_1=(1,-1,0),\quad \alpha_2=(1,0,-1).$$

(iii) 该基础解系不正交, 将其单位正交化:

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

当 $\lambda=-1$ 时, 求出其特征向量并单位化:

$$\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 成为 $\mathbb{R}^3$ 中的一组标准正交基. 在这组标准正交基下, 矩阵 A 成为对角矩阵, 即：令

$$C=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

则

$$C^{\mathrm{T}}AC=A_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad\text{即}\quad A\sim A_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{0.1.2}$$

注 1　在新的坐标系 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 下, 线性变换 A 有最简单的标准型.

注 2　由于 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 是 A 的特征向量, 有

$$A\beta_1=2\beta_1,\quad A\beta_2=2\beta_2,\quad A\beta_3=-\beta_3. \tag{0.1.3}$$

对于 $\forall x\in\mathbb{R}^3$, 在原来的正交基 e_1,e_2,e_3 下,

$$x=(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3, \tag{0.1.4}$$

其中 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$.

在空间构造一组新的正交基 (它们是由对称矩阵 A 确定的)β_1,β_2,β_3, 则

$$x=(a_1,a_2,a_3)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3, \tag{0.1.5}$$

其中 $a_1=(x,\beta_1),\ a_2=(x,\beta_2),a_3=(x,\beta_3)$ 是 x 在 β_1,β_2,β_3 上的投影.

由于 A 是线性的,

$$\begin{aligned}Ax&=A(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)=a_1A\beta_1+a_2A\beta_2+a_3A\beta_3\\&=2a_1\beta_1+2a_2\beta_2-a_3\beta_3=(2a_1,2a_2,-a_3)=y.\end{aligned}$$

这说明, 矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 确定了一组正交基 β_1,β_2,β_3, 对于任何的 $x\in\mathbb{R}^3$, 只要知道 x 在 β_1,β_2,β_3 上的投影 (a_1,a_2,a_3), 则 A 作用的方式一目了然, 即

$$Ax=(\lambda_1a_1,\lambda_2a_2,\lambda_3a_3)=(2a_1,2a_2,-a_3). \tag{0.1.6}$$

注 3　数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化. 在确定了特征值和特征向量以后, 在每一个特征子空间上, A 作用的形式是最简单的 (放大、缩小特征值的倍数). 令 P_1,P_2,P_3 是在 β_1,β_2,β_3 上的投影 (算子), 则

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=2P_1+2P_2-P_3, \tag{0.1.7}$$

在这里 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-1$. A 分解成 3 个投影变换 (算子) 的线性组合.

0.1.2　无穷维空间函数按坐标分解

高等数学研究的主要运算是微分、积分, 它们作用的对象是函数. 我们注意到, 与 $\mathbb{R}^n$ 空间中线性变换 A 相同, 微分、积分运算都是线性运算, 不同的是 A 把一个 n 维向量变成 n (或 m) 维向量, 而微 (积) 分把一个函数映射成另一个函数.

我们希望通过类比和联想, 把有限维空间处理问题的这种方式, 把矩阵运算的分解 (0.1.6) 和 (0.1.7) 类比地推广到微分、积分运算上. 这是线性算子谱分析理论要研究和处理的问题.

但是我们同时注意到, 函数一般来说不能用有限个数刻画 (可能可以用无穷多个数刻画). 为了考虑算子的分解, 首先要研究函数的分解, 给出类似于 (0.1.4) 中向量的分解的形式. 事实上在数学分析里我们已经有这样分解的例子:

例 0.1.2 (Taylor 展开)　如果函数满足很好的性质, 则在它的收敛半径内, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \tag{0.1.8}$$

即: 函数可以和一个可数无穷数列一一对应,

$$f(x) \backsim \left(f(0), \frac{f'(0)}{1!}, \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots\right). \tag{0.1.9}$$

这和一个向量在 n 维空间的展开完全类似, 区别在于 $(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots)$ 不是"正交系".

下面的我们熟知的 Fourier 展开就是一种在正交系中的展开.

例 0.1.3　Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

其中

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \tag{0.1.10}$$

$$f(x) \sim (a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots).$$

f 可以和这无穷数列一一对应.

类似于 $\mathbb{R}^n$, 在这个函数空间 $L^2(-\pi, \pi)$ 上定义内积 (参阅 1.1.2 节例 1.1.19)

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \tag{0.1.11}$$

空间中构成坐标系的函数列为

$$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad e_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad e_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,$$
$$e_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \cdots,\quad e_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\quad e_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\quad \cdots,\tag{0.1.12}$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m,\end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m,\end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\,\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi}e_i\,e_j\,\mathrm{d}x=(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}\tag{0.1.13}$$

$\{e_i\}$ 形成空间中的一组标准正交基. 并且有

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}(f(x),1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),$$
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(f(x),\cos kx)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right),$$
$$b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right).$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&\backsim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\\&=(f(x),e_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\\&\quad+\left(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(f,e_k)e_k.\end{aligned}\tag{0.1.14}$$

这意味着, 对于函数 f, 有

$$f(x)\backsim a_0e_0+a_1e_1+b_1e_2+\cdots+a_ke_{2k-1}+b_ke_{2k}+\cdots,\tag{0.1.15}$$

其中:

$$a_0=(f,e_0),\quad a_1=(f,e_1),\quad b_1=(f,e_2),\quad \cdots,\quad a_k=(f,e_{2k-1}),\quad b_k=(f,e_{2k}),\quad \cdots,$$

$(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots)$ 为函数 f 在这个坐标系下的坐标, 即

(1) 我们在函数空间建立了一个正交坐标系;

(2) 每一个函数在这个坐标系下和一组 (可数多个) 数一一对应,

$$f(x)\backsim\sum_{k=1}^{\infty}(f,e_k)e_k, \tag{0.1.16}$$

其中系数是 $f(x)$ 和 e_k 的内积, 即 $f(x)$ 在 e_k 上的投影.

与有限维的情况加以对照: 在 $\mathbb{R}^n$ 中, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$x=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,\quad |x|^2=\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $x_1=(x,e_1)$, $x_2=(x,e_2)$, $\cdots$, $x_n=(x,e_n)$.

二者之间的区别是什么? $\mathbb{R}^n$ 是有限维空间, 而函数空间是无穷维的. 无穷维求和是一个极限过程.

$$f(x)=(?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f,e_k)e_k,\quad \|f(x)\|^2=(?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|(f,e_k)|^2. \tag{0.1.17}$$

(?) 提示在无穷维空间, 要考虑极限是不是存在. 如果存在, 极限的收敛是在什么意义下 (即等号成立的意义).

0.1.3 Sturm-Liouville 微分算子按特征分解

下面把无穷维空间的线性算子 (微分运算) 与有限维空间的线性算子相对照, 进而研究线性算子的谱分解问题. 从例 0.1.1 可以看到, 矩阵 A 和一个正交系相对应,

$$\begin{aligned}A=(a_{ij})_{n\times n}&\Rightarrow \text{特征值}\Rightarrow\text{特征向量}\\&\Rightarrow\text{由它的特征向量产生一个正交坐标系}\\&\Rightarrow A\text{ 在这个正交坐标系下成为对角矩阵}.\end{aligned} \tag{0.1.18}$$

下面来看微分运算:

例 0.1.4 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases}-y''(t)=\lambda y(t),\\ y(-\pi)=y(\pi),\quad -\pi\leqslant t\leqslant\pi.\\ y'(-\pi)=y'(\pi).\end{cases} \tag{0.1.19}$$

这是一个二阶的常微分方程, 加上两个边界条件 (周期边界条件) 的限制, 微分是一种运算, 边界条件给出了它的定义域.

注 1 把 $Ty=-y''$ 看成一种运算, 边界条件对运算的定义域加以适当的限制, 使之成为一个"对称"算子 (参阅 5.2 节).

这样 Sturm-Liouville 问题 $Ty=\lambda y$ 与 $Ax=\lambda x$, 形式上相似, 我们猜想: Sturm-Liouville 算子 T: 是否有可数多个特征值 (函数空间是无穷维的), 不同特征值对应的特征函数是否相互正交, 进一步它是否可以按特征值进行分解.

首先我们求解它的特征值, 即满足方程 (0.1.19) 的解. 因为要满足边界条件, 不是对于所有的 λ, Sturm-Liouville 问题都有解. 有解的那些 λ, 称为 Sturm-Liouville 问题的特征值.

(1) 求出微分方程的通解.

(a) $\lambda>0$ 时 $y(t)=A\cos\sqrt{\lambda}\,t+B\sin\sqrt{\lambda}\,t$, 代入边界条件 $y(-\pi)=y(\pi)$, 则有

$$\begin{aligned}&A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi-B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi+B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi\\ \Rightarrow&2B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0,\end{aligned}$$

再代入边界条件 $y'(-\pi)=y'(\pi)$, 有

$$\begin{aligned}&-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi=A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi\\ \Rightarrow&A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi=0.\end{aligned}$$

由于 A,B 不同时为零 $\Rightarrow\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$. 所以 $\lambda_n=n^2$, 即 $\lambda_n=1,4,9,\cdots$ 时两个边界条件同时满足, 特征函数为: $\cos nx,\sin nx,\ n=1,2,\cdots$.

(b) 当 $\lambda=0$ 时, $-y''=0$, 求出解 $y\equiv1$, 满足边界条件.

(c) 当 $\lambda<0$ 时, 求出方程的解: $y=C\mathrm{e}^{\pm\sqrt{-\lambda}\,t}$ 不满足周期边界条件.

所以把 $Ty=-y''$ 看成一种运算, 对应于 $Ty=\lambda y$ 的所有特征值为: $\{\lambda_n\}=\{0,1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots\}$, 问题 (0.1.19) 的特征函数是

$$\{y_n\}=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}.\tag{0.1.20}$$

注 2 这正是 Fourier 展开中的正交坐标系 (乘以系数可使之单位化).

注 3 把 $Ty=-y''$ 看成一种运算 (事实上它是自共轭 (对称) 算子), 有

$$Ty_n=\lambda_n y_n.\tag{0.1.21}$$

把 (0.1.21) 与 $A\beta_n=\lambda_n\beta_n$(0.1.3), $A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$ (0.1.7) 相对比, 是否可以有无穷维空间上线性算子的一种分解 (谱分解):

$$T=(?)\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n+\cdots.\qquad(\text{无穷维})$$

P_i 是其在特征元素上的投影算子 (参阅 5.2.2 小节).

注 4 进而考虑在新的函数空间下, 类似于 (0.1.5) 函数 $x(t)$ 可以分解为

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, y_i)e_i. \tag{0.1.22}$$

因为 y_i 是 T 关于 λ_i 的特征函数, $Ty_i = \lambda_i y_i$, Sturm-Liouville 算子 T 作用在 $x(t)$ 上, 是否可以有

$$Tx = T\sum_{i=1}^{\infty}(x, y_i)y_i = (?)\sum_{i=1}^{\infty}(x, y_i)Ty_i = \sum_{i=1}^{\infty}(x, y_i)\lambda_i y_i. \tag{0.1.23}$$

类似于 (0.1.7), 对于这个微分算子, 在确定了特征值和特征函数以后, 每一个特征子空间上, A 作用的形式是最简单的 (放大、缩小特征值的倍数). 令 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ 是在对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 特征子空间上的投影 (算子), 则

$$T = (?)\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n, \tag{0.1.24}$$

T 分解成可数多个投影算子的加权和.

两种运算之间是否可以交换顺序, 是数学研究重点关注的对象. (0.1.23) 中的 (?) 提示读者学习中要注意为什么这里可以交换顺序. 这里的微分运算并不是连续 (有界) 的线性算子, 而是一种“闭线性算子”(参阅 3.1 节).

0.1.4 无穷维空间线性算子的谱分解

在有限维空间, 可以有不同的正交系 (它们可以由不同的对称矩阵产生), 在无穷维空间是否也可以有不同的正交系, 它们可以由不同的线性算子产生? 下面的例子是在数学分析中看到过的 Legendre 多项式 ([5] p.169).

例 0.1.5 (Legendre 多项式) 考虑 Legendre 方程

$$\begin{cases} -(1-t^2)y'' + 2ty' = \lambda y, \quad -1 < t < 1, \\ y(1) < \infty, \\ y(-1) < \infty. \end{cases} \tag{0.1.25}$$

方程可以化为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1-t^2)y') = \lambda y, \tag{0.1.26}$$

它也是对称的微分算子. 可以求出特征值为 $\lambda_n = n(n+1)$, 特征函数为

$$y_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{0.1.27}$$

它们满足 $\int_{-1}^{1} y_n(t)y_m(t)\ \mathrm{d}t = 0\ (m \neq n)$, 是 $L^2[-1,1]$ 上的正交系特征函数系 (参阅 [20] 第 4 章第 3 节). 其中

$$
\begin{aligned}
&y_0(t) = 1, && y_1(t) = t,\\
&y_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), && y_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),\\
&y_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t + 3), && y_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

可以看到, 和 $\mathbb{R}^n$ 中一样, 在无穷维空间也有不同的正交系. Legendre 多项式是在 $L^2[-1,1]$ 中由多项式组成的正交系. 并且对于 Legendre 微分算子 L, 令 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ 是在 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 特征子空间上的投影 (算子), 则

$$
L = (?)\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n, \tag{0.1.28}
$$

L 分解成可数多个投影算子的加权和.

在上述线性代数、数学分析、微分方程的例子中, 对比 (0.1.7)、(0.1.24)、(0.1.28), 可以看到, 无穷维空间线性算子 (微分算子) 按特征分解和有限维空间的线性变换 (算子) 的按特征分解, 在研究和处理问题的思路上有许多相似之处. 本书从有限维空间矩阵的特征值理论出发, 通过类比、归纳的方法, 把它推广到一般线性算子的谱分解 (有限维空间一般称为特征分解) 上去.

线性算子的谱分解从结构上展示了线性算子的基本运算特征, 特别是紧的自共轭算子的谱分解和有限维空间对称矩阵的分解十分相似 (见 2.4 节和 2.5 节). 本书希望读者能够从简单中了解复杂, 从个性中理解共性, 从具体实例中感悟抽象的线性算子谱分解、谱积分的具体真实意义, 从实例才能感悟数学, 学会发现问题、解决问题的思想方法. 在这些乍看起来很不相干的东西中, 却存在着十分类似的地方. 我们希望从这些类似的东西中探寻一般的、真正属于本质的东西, 把它们抽象化为线性算子的谱理论, 加以统一处理.

在注意到无穷维空间和有限维空间线性算子特征分解有很相似一面, 可以类比的同时, 读者当然也必须注意到二者的区别. 第一个重要区别在于, 无穷维空间中的收敛性是必须要考虑的; 其二由于在无穷维空间中的线性运算, 比如微分、积分, 其运算的复杂程度远远高于有限维空间的矩阵运算, 可以想象其谱分解会比矩阵的特征值理论要复杂得多. 事实上无穷维空间的线性算子谱集合可以是有界集, 也可以是无界集, 也可以是空集, 后两种情况对于有限维空间的矩阵是不会发生的. 对于对称算子特征值 (谱) 是实的, 对于非对称的线性算子, 谱点可能包括非实的

数, 谱理论呈现进一步的复杂性. 在无穷维空间谱点可能有特征值、连续谱、剩余谱. 矩阵特征值的个数是有限的 (小于或等于它作用的空间的维数), 而无穷空间线性算子的谱的个数可以是无穷多个, 谱点可以是离散的, 也可以是连续的 (覆盖了整个一个区间), 这样 (0.1.24) 中的级数可能成为更一般的谱积分 (参阅 4.3 节、4.4 节).

本书在给出了赋范空间、线性算子的基本性质之后, 第二章给出了谱的定义、分类, 讨论了有界 (即连续) 线性算子谱集合的性质. 第三章和第四章研究了无界线性算子的谱理论. 微分算子是应用最广泛的一类无界线性算子, 第五章前三节从几种不同的角度定义了微分算子, 给出了微分算子的谱分析. 进而研究了微分算子的自共轭扩张理论. 后面一部分内容, 特别是具有中间亏指数微分算子的自共轭扩张, 使用辛几何讨论微分算子自共轭域的分类, 以及第六章中部分关于微分算子谱的离散性和本质谱的研究, 是作者和其研究团队的一些新的研究成果.

第一章　赋范空间和有界线性算子

§1.1　Banach 空间和 Hilbert 空间

1.1.1　赋范空间和 Banach 空间

定义 1.1.1　设 X 是数域 $\mathbb{K}$ (复数域或实数域) 上的线性空间, 若有从 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数 $\|\cdot\|$, 满足条件:

(1) 对任意的 $x\in X$, $\|x\|\geqslant 0$, 且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$(正定性);

(2) 对任意的 $x\in X$, $\alpha\in\mathbb{K}$, $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ (正齐次性);

(3) 对任意的 $x,y\in X$, $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (三角不等式),

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, X 称为线性赋范空间, 记为 $(X,\|\cdot\|)$.

显然, 函数

$$d(x,y)=\|x-y\|,\quad \forall x,y\in X \tag{1.1.1}$$

是线性空间 X 上定义的 x,y 之间的距离. 容易验证:

(1) $d(x,y)\geqslant 0$, $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

这样范数定义了 X 上的一个距离, (X,d) 是线性距离空间. 今后如无特殊说明, 赋范空间上的距离都是指由范数诱导的距离. 在 $(X,\|\cdot\|)$ 中可以考虑点列收敛的问题, 它总是理解为按范数收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 指的是

$$d(x_n,x)\to 0\quad 即\quad \|x_n-x\|\to 0,\quad n\to\infty,$$

简记为 $x_n\to x$. $(X,\|\cdot\|)$ 中的加法和数乘按 d 确定的距离是连续的.

命题 1.1.2　在线性赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中, 范数 $\|x\|$ 是 $x\in X$ 的连续函数.

证明　设 $\{x_n\}\subset X$ 收敛于 x, 由

$$\|x_n\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x\|$$

和

$$\|x\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x_n\|,$$

可知

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|.$$

因为 $\|x_n - x\| \to 0$, 故 $\|x_n\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$. □

定义 1.1.3 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是距离空间 X 中的序列, 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 都存在自然数 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 序列. 若距离空间 X 中的任何 Cauchy 序列都收敛, 则称 X 是完备的.

在赋范空间 (由 (1.1.1) 定义了距离), 完备性的概念扮演着十分重要的角色.

定义 1.1.4 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称为 Banach 空间, 如果它是完备的.

显然, 在一个空间中可以定义不同的范数.

定义 1.1.5 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果存在正常数 a 和 b, 使得

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

称这两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

如果线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价, 那么赋范空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 代数同构拓扑同胚, 两个空间中的收敛性是同样的.

例 1.1.6 令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义如下范数:

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty \tag{1.1.2a}$$

和

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}, \quad p = \infty. \tag{1.1.2b}$$

容易验证对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|x\|_p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数. (1.1.2) 同样可以在复的线性空间 $\mathbb{C}^n$上定义相应的范数.

可以证明, 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ 和 $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间, 并且这些范数都是等价的.

例 1.1.7 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$为满足如下性质数列的全体 $x = (x_1, x_2, \cdots)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,$$

在 l^p 上定义

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.3}$$

可以证明 $\|x\|_p$ 是 l^p 上的一个范数, 其中三角不等式可以由 Minkowski 不等式推出. 并且赋范空间 l^p 带有由 (1.1.3) 确定的距离是完备的, 因此 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ 是一个 Banach 空间.

例 1.1.8 设 $L^p[0,1](1 \leqslant p < \infty)$ 为全体定义在 $[0,1]$ 上满足以下性质的数值可测函数 $x(t)$:

$$\int_0^1 |x(t)|^p \, \mathrm{d}t < \infty,$$

在 $L^p[0,1]$ 上定义

$$\|x\|_p = \left[\int_0^1 |x(t)|^p \, \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.4a}$$

由积分 Minkowski 不等式, 可以证明 $\|x\|_p$ 满足三角不等式. 由此容易看出 $\|x\|_p$ 是一个范数①. 可以证明 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 是一个 Banach 空间.

事实上, 可以用任何区间 I, 或者更一般地用任何可测集 E 来取代区间 $[0,1]$, 其中范数可以定义为

$$\|x\|_p = \left[\int_E |x(t)|^p \, \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}.$$

更一般地, 设 (Ω, μ) 是 σ 有限的测度空间, 即 μ 是 Ω 上的测度, 而 Ω 可表示成 $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 这里 $\mu(E_n) < \infty \ (n = 1, 2, \cdots)$. 对于 $p \geqslant 1$, 设

$$L^p(\Omega, \mu) = \left\{ x(t) \left| \int_\Omega |x(t)|^p \, \mathrm{d}\mu(t) < \infty \right. \right\}.$$

对于 $x(t) \in L^p(\Omega, \mu)$, 定义

$$\|x\|_p = \left[\int_\Omega |x(t)|^p \, \mathrm{d}\mu(t)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.4b}$$

容易验证 $\|x\|_p$ 是一个范数, $L^p(\Omega, \mu)$ 是一个 Banach 空间.

例 1.1.9 $L^\infty(I)$ 记全体几乎处处有界的可测函数, 即对于 $\forall x \in L^\infty(I)$, 存在一个正实数 $B(\ 0 \leqslant B < +\infty)$, 使得 $|x(t)| \leqslant B$ 几乎处处成立. 在 L^∞ 上定义

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \operatorname{ess\,sup}\{|x(t)| \, | t \in I\} \\ &= \inf\{B | \, |x(t)| \leqslant B, \text{在 } I \text{ 上几乎处处成立}\}, \end{aligned}$$

$\|x\|_\infty$ 称为是 x 的本性上确界. $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是一个赋范空间, 并且是 Banach 空间.

① 严格地说, 在这儿 $x = 0$ 意味着几乎处处 $x(t) = 0$.

例 1.1.10　令 $C[a,b]$ 记定义在 $[a,b]$ 上的连续函数的全体, 定义

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|. \tag{1.1.5}$$

可以证明, $(C[a,b], \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, 且是一个 Banach 空间 (证明可参阅 [25]).

在赋范线性空间中可以考虑它的子空间. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, X_1 是线性空间 X 在代数意义下的子空间, 在 X_1 中赋以 X 中的范数, 那么 $(X_1, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, 称为 $(X, \|\cdot\|)$ 的赋范子空间, 简称 X 的子空间. 显然线性子空间的闭包是一个闭的线性子空间.

定理 1.1.11　令 M 是 Banach 空间 X 的线性子空间, 那么 M 是 Banach 空间的充要条件是 M 是闭的.

引理 1.1.12 (Riesz 引理)　设 M 是赋范线性空间 X 的一个真的闭线性子空间, 那么对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $x \in X, \|x\| = 1$, 使得 $d(x, M) \geqslant 1 - \varepsilon$, 其中

$$d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\}.$$

注　一般来说, $\varepsilon = 0$ 时, 上述定理不能成立. 其反例可参阅 [32].

1.1.2　内积空间和 Hilbert 空间

赋范线性空间的某些几何性质和我们十分熟悉的二维或三维 Euclid 空间相接近. 但是在下面引入的内积空间和 Hilbert 空间中, 它们的几何性质更接近 Euclid 空间, 特别地, 正交或者说垂直的概念被引入.

定义 1.1.13　设 X 是复线性空间, 如果对任给的 $x, y \in X$, 都有一个复数, 记为 (x, y) 与之对应, 并且这个对应满足以下性质:

(1) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ (正定性);

(2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (可加性);

(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (齐次性);

(4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (共轭对称性),

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$, 则称 (x, y) 为 x 与 y 的内积. X 上定义了内积称为内积空间.

由内积的定义, 有 $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.

定义 1.1.14　内积空间X中的元素x, y称为正交的, 如果 $(x, y)=0$, 记为$x \perp y$.

在内积空间, 定义

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.6}$$

下面的引理 1.1.15 和定理 1.1.16 证明它是一个范数, $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间.

引理 1.1.15 (Schwarz 不等式)　设 (x, y) 是内积空间 X 上的内积, 那么

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.1.7}$$

其中 $\|x\|$ 和 $\|y\|$ 由 (1.1.6) 定义.

证明 如果 $x=0$ 或者 $y=0$, Schwarz 不等式显然成立. 若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$, 对于任意的 $\alpha\in\mathbb{C}$,

$$0\leqslant(x-\alpha y,x-\alpha y).$$

特别地, 如果 $\alpha=(x,y)/(y,y)$, 那么

$$0\leqslant(x-\alpha y,x-\alpha y)=\|x\|^2-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2},$$

化简即得 $|(x,y)|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$. □

定理 1.1.16 内积空间 X 按范数 $\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}$ 成为线性赋范空间.

证明 容易验证定义 1.1.1 的条件 (1)、(2) 成立. 关于三角不等式,

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=\|x\|^2+2Re(x,y)+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2,\end{aligned}$$

使用 Schwarz 不等式, 有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$ □

定义 1.1.17 若内积空间 H 是完备的, 则称为 Hilbert 空间.

例 1.1.18 设 $x,y\in\mathbb{C}^n$, 定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}. \tag{1.1.8}$$

显然 $\mathbb{C}^n$ 是一个内积空间, 并且是 Hilbert 空间.

例 1.1.19 X 为 $[a,b]$ 上定义的复值连续函数的全体, 定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{1.1.9}$$

它是 X 上定义的一个内积, 其范数为

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

但是这时 X 不是完备的 (比较它与 $C[a,b]$ 的不同).

例 1.1.20 设 $X=L^2(I)$, 即在区间 I 上定义的满足 $\int_I|x(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty$ 的全体复值可测函数, 定义内积

$$(x,y)=\int_I x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.10}$$

X 成为一个内积空间, 并且是一个 Hilbert 空间.

以上两例函数的定义域可以推广到二维、三维以及 n 维空间.

例 1.1.21　设 $l^2 = l^2[0,\infty)$, 即全体复值数列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 且满足条件 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. 定义内积

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}, \tag{1.1.11}$$

l^2 成为一个内积空间, 且 l^2 是一个 Hilbert 空间.

例 1.1.22　设 $X = l^2(-\infty,\infty)$, 即全体形如 $x = (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots)$ 的复值数列, 满足条件 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \overline{y_i}, \tag{1.1.12}$$

则 $l^2(-\infty,\infty)$ 是一个内积空间, 并且是一个 Hilbert 空间.

例 1.1.23 (Sobolev 空间)　令 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集, $u \in C^n(\Omega)$, 即在 Ω 内具有 n 阶连续导数的函数, 定义 u 的范数为

$$\|u\|_{n,2} = \left[\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant n} |D^\alpha u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.13}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

事实上, $\|u\|_{n,2}$ 可能为 $+\infty$. 令 $\widetilde{C}^n(\Omega)$ 记全体满足 $\|u\|_{n,2}$ 有限的 $C^n(\Omega)$ 中的函数, 可以验证 $\widetilde{C}^n(\Omega)$ 在 (1.1.13) 下是一个赋范空间, 并且范数是由内积

$$(u, v)_n = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant n} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} \,\mathrm{d}x \tag{1.1.14}$$

产生的. $\widetilde{C}^n(\Omega)$ 关于范数 (1.1.13) 的完备化记为 Sobolev 空间 $H^n(\Omega)$.

另外一个重要的 Sobolev 空间是 $H_0^n(\Omega)$. 它是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 (1.1.13) 下的完备化, 其中 $C_0^\infty(\Omega)$ 是全体带有紧支柱的无穷次可微的函数. 一般来说, $H^n(\Omega)$ 和 $H_0^n(\Omega)$ 是不同的空间.

下面我们简述内积空间和 Hilbert 空间中的一些重要性质.

定理 1.1.24 设 X 是内积空间, 则内积 (x,y) 是 x,y 的连续函数, 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y(n \to \infty)$ 时, $(x_n, y_n) \to (x,y)$.

定义 1.1.25 设 X 是内积空间, $x,y \in X$, 如果 $(x,y)=0$, 称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$.

定理 1.1.26 在内积空间 X 中, 如果 $x \perp y$, 则

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{1.1.15}$$

定理 1.1.27 设 X 是内积空间, 则对于任意的 $x,y \in H$, 有以下关系式成立:

(1) 平行四边形法则:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2); \tag{1.1.16}$$

(2) 极化恒等式:

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2). \tag{1.1.17}$$

定理 1.1.28 设 X 是赋范空间, 如果范数满足平行四边形法则, 则可在 X 中定义一个内积, 使得由这个内积产生的范数还是 X 中原来的范数.

1.1.3 正交集和正交基

Hilbert 空间和一般的 Banach 空间的重要区别是有了正交性, 可以引入正交分解、正交基等相应的概念.

定义 1.1.29 内积空间 X 中两个集合 M 和 N 称为正交的, 如果对于任意的 $x \in M$, $y \in N$ 都有 $x \perp y$.

设 M 是内积空间 X 中的子集, M 的正交补定义为

$$M^{\perp} = \{x \in X | (x,y) = 0, \forall y \in M\}, \tag{1.1.18}$$

即 X 中与 M 正交的元素的全体.

定理 1.1.30 设 M 是内积空间 X 中的一个子集, 则 $M^{\perp}$ 是 X 中一个闭的线性子空间. 如果 X 是完备的, 则 $M^{\perp}$ 也是一个完备的内积空间.

定理 1.1.31 设 M 和 N 是内积空间 X 中的非空集合, 则

(1) 如果 $M \subset N$, 那么 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(2) $M \subset M^{\perp\perp}$;

(3) 如果 $M \subset N$, 那么 $M^{\perp\perp} \subset N^{\perp\perp}$;

(4) $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$;

(5) 如果 $x \in M \cap M^{\perp}$, 那么 $x = 0$;

(6) $\{0\}^{\perp} = X$, $X^{\perp} = \{0\}$;

(7) 如果 M 是 X 中的稠子集, 那么 $M^{\perp} = \{0\}$.

证明留给读者.

当 X 完备时, 可以有

定理 1.1.32 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的线性子空间, 则

(1) $M^{\perp\perp}=\overline{M}$, 其中 $\overline{M}$ 是 M 的闭包;

(2) $M^{\perp}=\{0\}$ 当且仅当 M 在 H 中稠密.

下面证明在 Hilbert 空间几何中扮演着重要角色的投影定理.

定理 1.1.33 (投影定理) 设 M 是 Hilbert 空间 H 中任意一个闭的线性子空间, 那么 $H=M\oplus M^{\perp}$, 即对于任给的 $x\in H$, 存在唯一的 $m\in M, n\in M^{\perp}$, 使得

$$x=m+n,$$

且

$$\|x\|^2=\|m\|^2+\|n\|^2,$$

其中 $M\oplus M^{\perp}$ 表示 M 和 $M^{\perp}$ 的正交和 (正交和的定义见定义 1.4.1).

证明 设 $Y=M\oplus M^{\perp}$, 首先证明 Y 是闭的. 令 $\{z_n\}$ 是 $M\oplus M^{\perp}$ 中的 Cauchy 列. 因为 H 完备, 存在 $z\in H$, 使得 $z=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$. 由于 $z_n=x_n+y_n$, $x_n\in M$, $y_n\in M^{\perp}$, 注意到 $x_n\perp y_n$, 有

$$\|z_n-z_m\|^2=\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2.$$

因此 $\{x_n\},\{y_n\}$ 分别是 M 和 $M^{\perp}$ 中的 Cauchy 列, M 和 $M^{\perp}$ 都是闭的, 其极限 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在, 且 $x\in M, y\in M^{\perp}$, 即 $z=x+y$, 所以 $Y=M\oplus M^{\perp}$ 是闭的线性子空间.

因为 $M\subset Y$, $M^{\perp}\subset Y$ 根据定理 1.1.31 (1) $Y^{\perp}\subset M^{\perp}, Y^{\perp}\subset M^{\perp\perp}$, 即 $Y^{\perp}\subset M^{\perp}\cap M^{\perp\perp}$. 根据定理 1.1.31(5) 我们有 $Y^{\perp}=\{0\}$. 由定理 1.1.32(2) 知 Y 在 H 中稠, 又因为 Y 是闭的, 得到 $Y=H$.

从 $M\cap M^{\perp}=\{0\}$ 知, 存在唯一的 $m\in M$, $n\in M^{\perp}$, 使得 $x=m+n$, 因为 $m\perp n$, 于是 $\|x\|^2=\|m\|^2+\|n\|^2$. □

定义 1.1.34 内积空间 X 中的一族元素 $\{x_j\}$ 称为正规正交集, 如果

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, $\delta_{ij}=1$, 当 $i=j$ 时; $\delta_{ij}=0$, 当 $i\neq j$ 时.

定义 1.1.35 设 S 是 Hilbert 空间 H 中的正规正交集, 如果 H 中没有其他的正规正交集真包含 S, 则称 S 为 H 的正规正交基.

命题 1.1.36 设 S 是 Hilbert 空间的正规正交集, 则 S 是 H 的正规正交基的充要条件是 H 中没有非零元与 S 中的每个元正交.

定理 1.1.37 每个非零的 Hilbert 空间都有正规正交基.

定理 1.1.38 若 Hilbert 空间 H 可分, 则 H 有一个可数的正规正交基.

定理 1.1.39 设 $S=\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in I)$ 是 Hilbert 空间 H 的一个正规正交基, 则对于任何的 $x\in H$ 都有

$$x=\sum_{\alpha\in I}(x,x_\alpha)x_\alpha, \tag{1.1.19}$$

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in I}|(x,x_\alpha)|^2, \tag{1.1.20}$$

其中 I 是一个指标集, $\sum\limits_{\alpha\in I}z_\alpha$ 表示最多只有可数个 $z_\alpha\neq 0$.

特别地, 当 H 是可分的 Hilbert 空间时, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 H 的正规正交基, 则对于任何的 $x\in H$, 都有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^\infty|(x,x_n)|^2. \tag{1.1.21}$$

式 (1.1.21) 通常称为 Parseval 等式.

习 题 1.1

1. 在实数轴 $\mathbb{R}$ 上, 令 $d(x,y)=|x-y|^p$, 当 p 为何值时, $\mathbb{R}$ 是距离空间? 何时是赋范空间?

2. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, 对于 $x,y\in X$, 令

$$d_1=\begin{cases}0, & x=y,\\ \|x-y\|+2, & x\neq y.\end{cases}$$

证明 d_1 是 X 上的距离但不是由范数诱导的距离.

3. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, 令 $S_r=\{x|\,\|x\|=r\}, r>0$, 假定 $X\neq\{0\}$. 证明 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间当且仅当 $\{S_r,\|\cdot\|\}$ (对给定的 $r>0$) 是完备的.

4. 设 c 表示全体收敛数列, 即对每个 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in c$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在且有限. 证明

(1) $\|x\|_\infty=\sup\{|x_i|\,|1\leqslant i<\infty\}$ 是 c 上的范数;

(2) c 是 l^∞ 的线性子空间;

(3) c 是 $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集.

5. 设 c_0 表示全体收敛到零的数列, 即对每个 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in c_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明

(1) c_0 是 c 的线性子空间;

(2) c_0 是 $(c,\|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集.

6. 设 $H_p(1\leqslant p<\infty)$ 表示具有性质

$$\|f\|_p=\sup_{r<1}\left\{\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p}<\infty$$

的解析函数 $f(z)(|z|<1)$ 的全体. 证明 $\|f\|_p$ 是范数并且 $(H_p,\|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间.

7. 设 $0<p<1$, 考虑空间 $L^p[0,1]$, 其中

$$\|x\|=\left(\int_0^1|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

证明 $\|x\|$ 不是 $L^p[0,1]$ 上的范数, 但 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是 $L^p[0,1]$ 上的距离. (提示: 若 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 则 $\alpha\leqslant\alpha^p\leqslant 1$.)

8. 对于 $f\in C(-\infty,\infty)$, 定义 $\sigma_n(f)=\sup\{|f(t)|\,|\,|t|\leqslant n\}$, $\rho_n(f)=\min\{1,\sigma_n(f)\}$, $\|f\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\rho_n(f)$. 证明

(1) $\rho_n(f)$ 及 $\|f\|$ 不是范数;

(2) $d(f,g)=\|f-g\|$ 是 $C(-\infty,\infty)$ 上的距离;

(3) $d(f_n,f)\to 0(n\to\infty)$ 当且仅当 $\{f_n(t)\}$ 在 $-\infty<t<\infty$ 的紧集上一致收敛于 $f(t)$.

9. 设 X 表示复序列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 的全体, 定义

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\min(1,|x_n|).$$

(1) $\|\cdot\|$ 是否是 X 上的范数?

(2) $\|x-y\|$ 是否可定义为 X 上的距离? 假若可以, 说明 $\|x^{(n)}-x\|\to 0(n\to\infty)$ 的意义.

10. 设 $H^p(0<p\leqslant 1)$表示 $[a,b]$ 上全体满足 Hölder 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^p$$

的函数, 线性运算的定义与 $C[a,b]$ 中的相同. 在 H^p 中定义范数

$$\|x\|=|x(a)|+\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p},$$

证明 H^p 为 Banach 空间.

11. 设 X 是 $[0,1]$ 上所有连续函数 $x=x(t)$ 的集合. 证明

$$\|x\|=\left(\int_0^1|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

是 X 上的范数, 但 X 在这种范数下不完备.

12. 在 $L^2[0,1]$ 上规定不同范数:

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t,\quad \|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_3=\left(\int_0^1(1+t)|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

哪些是等价范数? 试说明理由.

13. 设 H 是在直线 $\mathbb{R}$ 上平方可积、导数也平方可积的连续函数集合, 对于每个 $f \in H$, 定义

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 H 是 Banach 空间.

14. 设 $\rho(t)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的非负勒贝格可测的实函数, H 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可测且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \rho(t) \mathrm{d}t < \infty$ 的全体函数. 证明 H 按通常函数的线性运算以及

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\rho(t)\mathrm{d}t, \quad \forall f, g \in H$$

成为 Hilbert 空间.

15. 证明在可分内积空间中, 任一正规正交集最多为一可数集.

16. 若 H 是内积空间, $M, N \subset H$, 则

(1) 若 $M \perp N$, 则 $M \subset N^{\perp}, N \subset M^{\perp}$;

(2) $M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$.

17. 设 H 为 Hilbert 空间, $\{e_k\}, \{e_k'\}$ 是 H 中的两个正规正交集, 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|e_k - e_k'\|^2 < 1$. 证明如果 $\{e_k\}, \{e_k'\}$ 中之一是完备的, 则另一个也是完备的.

18. 设 H 为 Hilbert 空间, $\{x_n\}$ 是 H 中的正交集, 则下列条件等价:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$ $(\forall y \in H)$ 收敛;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛.

19. 设 H 为 Hilbert 空间, 若 $E \subset H$ 是线性子空间并且对于任意的 $x \in H$, x 在 E 上的投影存在, 则 E 是闭的.

20. 设 M, N 是内积空间 H 的子空间, $M \perp N$, $L = M \oplus N$, 证明 L 是闭子空间的充分必要条件是 M, N 均为闭子空间. 充分性部分假定 H 完备.

21. 试证明对于定理 1.1.26, 若内积空间 X 是实的, 则 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ 蕴涵着 $x \perp y$, 但若 X 是复空间时, $x \perp y$ 未必成立. 举例说明之.

22. 对于内积空间 H, 下述条件等价:

(1) $x \perp y$;

(2) $\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

(3) $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

23. 设 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 是内积空间 X 中的线性独立集, 如果 $\{x_1,x_2\}$ 满足 $(x_i,x_j)=\delta_{ij}$, $1\leqslant i,\ j\leqslant 2$. 定义 $f\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{R}$ 如下:

$$f(\alpha_1,\alpha_2)=\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2-x_3\|.$$

证明当 $\alpha_i=(x_3,x_i)(i=1,2)$ 时, f 取得最小值.

24. 设 x,y 是复内积空间 X 中的两个非零向量, 则

(1) $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 当且仅当 y 是 x 的正倍数;

(2) $\|x-y\|=|\|x\|-\|y\||$ 当且仅当 y 是 x 的正倍数;

(3) 给定 $z\in X,\|x-y\|=\|x-z\|+\|z-y\|$ 当且仅当存在 $\alpha\in[0,1]$, 使得 $z=\alpha x+(1-\alpha)y$.

25. 若 $\{u_n\}$ 是内积空间 X 中的正规正交序列, 则对 $\forall x\in X,(u_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$.

26. 设 X 为内积空间, $x,y\in X$, 假定 $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=\|x\|,\forall\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$. 证明 $x=y$. 若 X 是赋范空间但不是内积空间时, 情况又如何?

27. 赋范线性空间 X 被称作是一致凸的, 若 X 中的任何满足 $\|x_n\|=\|y_n\|=1,\|x_n+y_n\|\to 2$ 的序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有 $\|x_n-y_n\|\to 0(n\to\infty)$. 证明任何内积空间都是一致凸的.

§1.2 连续线性算子

1.2.1 连续线性算子和它的范数

如同赋范空间、Hilbert 空间等概念一样, 线性算子是泛函分析中最重要的基本概念. 在许多数学问题, 如微分方程、积分方程、量子力学中要研究特定空间中的线性运算, 或者说一种线性映射, 称为线性算子.

定义 1.2.1 设 T 是从线性赋范空间 $(X,\|\cdot\|_1)$ 中的线性子空间 $\mathfrak{D}(T)$ 到赋范空间 $(Y,\|\cdot\|_2)$ 中的映射, 满足条件: 对于任意的 $x,y\in\mathfrak{D}(T),\alpha\in\mathbb{K}$,

$$T(x+y)=Tx+Ty,\quad T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

称 T 是从 X 中到 Y 中的线性算子, $\mathfrak{D}(T)$ 为 T 的定义域.

特别地, 称从赋范空间 X 到数域 $\mathbb{K}$ 中的线性算子 f 为线性泛函.

如果存在一个常数 $M>0$, 使得对一切 $x\in\mathfrak{D}(T)$ 都有

$$\|Tx\|_2\leqslant M\|x\|_1,$$

则称 T 是有界线性算子. 如果一个线性泛函是有界的, 即

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|_1,\quad \forall x\in\mathfrak{D}(T),$$

则称 f 为有界线性泛函.

显然有界线性算子把有界集映成有界集.

如果 $x_n \to x\,(n \to \infty)$, 有 $Tx_n \to Tx$, 则称 T 是连续的. 可以证明:

定理 1.2.2 设 T 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子, 则下列条件等价:

(1) T 在 $\mathfrak{D}(T)$ 中的某点连续;

(2) T 在 $\mathfrak{D}(T)$ 中的所有点连续;

(3) T 是有界的.

定义 1.2.3 设 T 是赋范空间 X 上到 Y 中的有界线性算子, $\|Tx\|_2 \leqslant M\|x\|_1$, $\forall x \in X$, 记

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}, \tag{1.2.1}$$

称 $\|T\|$ 为线性算子 T 的范数.

由于 $\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} \leqslant M$ 及 $\|Tx\|_2 \leqslant \|T\|\,\|x\|_1$, 可知算子范数是一个有穷数, 并且是使得 $\|Tx\|_2 \leqslant M\|x\|_1\ (\forall x \in \mathfrak{D}(T))$ 成立的最小常数.

可以证明

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 = \sup_{\|x\|_1\leqslant 1} \|Tx\|_2. \tag{1.2.2}$$

例 1.2.4 考虑 n 阶方阵 $A = (a_{ij})(i,j = 1,2,\cdots,n)$, 对于任意的 $x \in \mathbb{C}^n$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 令

$$\varsigma_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.2.3}$$

$Ax = z$, 其中 $z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \cdots, \varsigma_n)$. 显然 A 是 $\mathbb{C}^n$ 上到 $\mathbb{C}^n$ 中的线性算子. 由 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right|^2\right)^{\frac12} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac12} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{\frac12} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac12} \|x\|,\end{aligned}$$

因此 A 是一个有界线性算子.

例 1.2.5 考虑积分算子 $y = Kx$, 其中

$$y(t) = \int_I k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.2.4}$$

设

$$B = \int_I \int_I |k(t,s)|^q \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s < \infty,$$

其中 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $x \in L^p(I)$. 显然 K 是一个线性算子. 由 Hölder 不等式,

$$\left|\int_I k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \left[\int_I |k(t,s)|^q \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_I |x(s)|^p \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 因此

$$\int_I |y(t)|^q \,\mathrm{d}t \leqslant \int_I \left[\int_I |k(t,s)|^q \,\mathrm{d}s\right] \cdot \left[\int_I |x(s)|^p \,\mathrm{d}s\right]^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}t,$$

即

$$\|y\|_q \leqslant B^{\frac{1}{q}} \|x\|_p . \tag{1.2.5}$$

K 是一个从 $L^p(I)$ 到 $L^q(I)$ 空间的有界线性算子.

例 1.2.6 若 $K(t,s)$ 是 $I \times I$ 上的连续函数, 令 $y = Tx$,

$$Tx = \int_I k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.2.6}$$

其中 $x \in C(I)$, 显然 T 是一个从 $C(I)$ 到 $C(I)$ 的线性算子.

$$\|Tx\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_I k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \left(\max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_I |k(t,s)|\,\mathrm{d}s\right) \|x\| .$$

所以 T 是一个有界线性算子.

例 1.2.7 考虑无穷矩阵 (a_{ij}), 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty, \quad q > 1, \tag{1.2.7}$$

对于 $x \in l^p (p > 1)$, $x = (\xi_j)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 定义

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \cdots ,$$

$Tx = y$, $y = (\eta_i)$. 显然 T 是空间 l^p 到 l^q 的线性算子. 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q &= \sum_{i=1}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\right|^q \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}^q \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \cdot \|x\|_p^q.\end{aligned}$$

于是 T 是 l^p 上到 l^q 中的有界线性算子.

例 1.2.8 考虑积分算子 $y = Kx$, 其中

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1.2.8}$$

$k(\cdot) \in L^1(-\infty, \infty)$. 因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |k(t-\tau)|\,|x(\tau)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \|k\|_1 \|x\|_1,\end{aligned}$$

即 K 是一个从 $L^1(-\infty, \infty)$ 到它自身的有界线性算子.

另外, 对于任给的 $x \in L^p(-\infty, \infty)$ $(1 < p < +\infty)$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |k(t-\tau)|^{\frac{1}{q}} \cdot |k(t-\tau)|^{\frac{1}{p}} |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |k(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |k(t-\tau)|\,|x(\tau)|^p\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^p \mathrm{d}t &\leqslant \|k\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |k(t-\tau)|\,|x(\tau)|^p\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &= \|k\|_1^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^p \|k\|_1,\end{aligned}$$

即

$$\|Kx\| \leqslant \|k\|_1 \|x\|_p. \tag{1.2.9}$$

同时, $p = \infty$ 时上式显然成立, 即 (1.2.8) 表示了一个从 $L^p(-\infty, \infty)$ 到 $L^p(-\infty, \infty)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) 的有界线性算子.

1.2.2 赋范线性空间 $\mathfrak{B}(X, Y)$

进一步, 可以把有界线性算子看成一个元素, 构成一个新的线性空间.

定义 1.2.9 X, Y 是赋范线性空间, $\mathfrak{B}(X, Y)$ 表示从 X 中到 Y 的有界线性算子的全体.

在 $\mathfrak{B}(X, Y)$ 中可以自然地定义线性运算, 即对于任给的 $A, B \in \mathfrak{B}(X, Y)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义

$$(A + B)(x) = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

在 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 中, (1.2.1) 给出的算子的范数可以作为线性算子空间的范数. 可以证明, (1.2.1) 满足定义 1.1.1 范数的三个条件, 于是 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 是一个赋范线性空间. 如果 $Y = X$, 把 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 简记为 $\mathfrak{B}(X)$. 显然在 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 中可以讨论算子列按范数的收敛性.

命题 1.2.10　空间 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 中算子列按范数收敛等价于算子列在 X 中的单位球面上一致收敛.

对于赋范空间 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 的完备性, 有如下定理:

定理 1.2.11　设 X 是赋范空间, Y 是 Banach 空间, 则 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间.

证明　设 $\{T_n\}$ 是 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 中任意的 Cauchy 列, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

于是对于任意 $x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \tag{1.2.10}$$

由此可知, 对于 $\forall x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列, 由于 Y 完备, 所以存在 $y \in Y$, 使得

$$T_n x \to y \quad (n \to \infty).$$

定义 $Tx = y$, 显然 T 是 X 上取值到 Y 中的线性算子. 由于

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

$\{\|T_n\|\}$ 是 Cauchy 数列, 所以存在 $M > 0$, 使得 $\|T_n\| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此

$$\|Tx\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n x\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant M \|x\|,$$

即 $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$. 于是由 (1.2.10), 令 $m \to \infty$, 有, 当 $n > N$ 时,

$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon,$$

即 $T_n \to T(n \to \infty)$, $\mathfrak{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间. □

注　特别地, 当 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 时, 由于 $\mathbb{K}$ 是 Banach 空间, $\mathfrak{B}(X,\mathbb{K})$ 是 Banach 空间, 即 X 上定义的全体有界线性泛函组成一个 Banach 空间.

定义 1.2.12　设 $T, T_n \in \mathfrak{B}(X,Y)(n = 1, 2, \cdots)$. 如果对于每一个 $x \in X$,

$$T_n x \to Tx \quad (n \to \infty),$$

则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T (或 $\{T_n\}$ 逐点收敛到 T).

显然, 如果 $\{T_n\}$ 一致收敛到 T, 则 $\{T_n\}$ 必强收敛于 T, 反之不然.

例 1.2.13 空间 $l^p(p\geqslant 1)$ 中定义算子列 $\{T_n\}$:

$$T_n x = x_n, \quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $x=\{\xi_k\}\in l^p$, $x_n=(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$. 显然 T_n 是 l^p 到 l^p 的线性算子, 且

$$\|T_n x\|_p=\|x_n\|_p=\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|x\|,$$

所以 $T_n(n=1,2,\cdots)$ 是有界的. 对于每一个 $x\in l^p$,

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n x\|_p=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_p=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0,$$

即 $\{T_n\}$ 强收敛到零算子. 但是 $\{T_n\}$ 并不按范数收敛于零算子. 容易证明 $\|T_n\|=1$.

若 X,Y 都是 Banach 空间, 有如下定理:

定理 1.2.14 设 X,Y 是 Banach 空间, 则有界线性算子空间 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 在强收敛意义下完备, 即 $T_n\in\mathfrak{B}(X,Y)$, 如果对于每一个 $x\in X$, $\{T_n(x)\}$ 是 Y 中 Cauchy 列, 则存在 $T\in\mathfrak{B}(X,Y)$, $\{T_n\}$ 强收敛到 T .

证明读者可参阅文献 [25].

进一步地, 可以引入弱收敛的概念.

定义 1.2.15 设 X 是赋范空间, $x_n,x_0\in X$, 如果对于每一个 X 上定义的有界线性泛函 f 都有 $f(x_n)\to f(x_0)$ $(n\to\infty)$, 则称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x_0, 记为 $x_n\xrightarrow{w}x_0$, 称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的弱极限.

可以证明

(1) 弱极限是唯一的;

(2) 如果 $\{x_n\}$ 弱收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界;

(3) 如果 $\{x_n\}$ 按范数收敛到 x_0, 则 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x_0; 反之不然.

对于 Banach 空间 X, $\mathfrak{B}(X)$ 不仅是 Banach 空间, 而且是一个代数, 对于任何 A, $B\in\mathfrak{B}(X)$, 可以定义乘法

$$(AB)x=A(Bx), \quad x\in X.$$

命题 1.2.16 设 $A,B\in\mathfrak{B}(X)$, 则 $AB\in\mathfrak{B}(X)$ 且

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|. \tag{1.2.11}$$

特别地, 对于任意自然数 n,

$$\|A^n\|\leqslant\|A\|^n. \tag{1.2.12}$$

1.2.3 逆算子和有界的逆算子

定义 1.2.17 设 X, Y 都是线性赋范空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 记

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y \mid 存在\ x \in \mathfrak{D}(T),\ 使得\ y = Tx\}, \tag{1.2.13}$$

称为 T 的值域. 如果 $\mathcal{R}(T) = Y$, 则称 T 是满射的.

如果对于任给的 $y \in \mathcal{R}(T)$, 只有唯一的 $x \in X$, 使得 $y = Tx$, 则称 T 是单射. 这时可以定义从 $\mathcal{R}(T)$ 到 X 的算子 T^{-1}:

$$T^{-1}y = x,\ 当\ y = Tx,$$

T^{-1} 称为 T 的逆算子. 显然 T^{-1} 也是线性算子, 在众多数学问题中, 求方程 $Tx = y$ 的解, 即考虑 T^{-1} 是否存在、唯一以及 T^{-1} 是否连续 (涉及解的稳定性) 等相关的问题.

定理 1.2.18 设 T 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子, 且存在常数 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m\|x\|, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T), \tag{1.2.14}$$

则 T 存在定义在 $\mathcal{R}(T)$ 上的有界逆算子 T^{-1}, T^{-1}: $\mathcal{R}(T) \to X$, 并且 T^{-1} 有界,

$$\left\|T^{-1}y\right\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{R}(T). \tag{1.2.15}$$

反之, 如果定义在 $\mathcal{R}(T)$ 上的逆算子 T^{-1} 存在且连续, 那么存在一个正数 m, 使得 (1.2.14) 成立.

证明 首先设 (1.2.14) 成立, 显然 $Tx = 0$ 蕴涵 $x = 0$, 故 T 是单射的, T^{-1} 存在. 设 $y = Tx$, 则 $x = T^{-1}y$, 由 (1.2.14),

$$\left\|T^{-1}y\right\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{m}\|Tx\| = \frac{1}{m}\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{R}(T).$$

反之, 如果 T^{-1} 存在且连续, 但 (1.2.14) 不成立, 则对每个自然数 n, 存在 $x_n \in X$, 使得

$$\|Tx_n\| < \frac{1}{n}\|x_n\|.$$

设 $y_n = Tx_n$, $x_n = T^{-1}y_n$, 则

$$\|y_n\| < \frac{1}{n}\left\|T^{-1}y_n\right\|,$$

由此推出 T^{-1} 无界, 矛盾. □

注 1 在这里没有要求 T 是有界的, 并且也没有对于 $\mathcal{R}(T)$ 是否等于 Y 有任何要求.

注 2 线性算子满足 (1.2.14) 称为是下方有界的.

定义 1.2.19 设 (X,d) 是距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果存在常数 $q>0$, 使得对所有 $x,y\in X$,

$$d(Tx,Ty)\leqslant qd(x,y),$$

则称 T 满足 Lipschitz 条件, 特别地如果 $q<1$, 则称 T 为压缩.

定理 1.2.20 (压缩映像原理) 设 (X,d) 是完备的距离空间, $T:X\to X$ 是压缩, 则存在唯一的 $\bar{x}\in X$, 使得 $T\bar{x}=\bar{x}$. $\bar{x}$ 称为 T 的不动点.

例 1.2.21 设 $T\in\mathfrak{B}(X)$, 考虑 $\lambda I-T$, 其中 $\lambda\in\mathbb{C}$, 从三角不等式知

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant|\|\lambda x\|-\|Tx\||,\quad\forall x\in X.$$

因为 T 是有界的, 对于 $\forall x\in X$ 有 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|$, 所以对于 $|\lambda|>\|T\|$, 有

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant(|\lambda|-\|T\|)\,\|x\|.$$

因此由定理 1.2.18 对于充分大的 λ ($|\lambda|>\|T\|$), $\lambda I-T$ 有定义在值域 $\mathcal{R}(T)$ 上的有界逆算子.

进一步考虑映射

$$K_y(x)=\frac{1}{\lambda}y+\frac{1}{\lambda}Tx,$$

其中 $y\in X$. 当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, K_y 是一个压缩, 根据压缩映像原理, X 中存在唯一的不动点 x, 使得

$$K_y(x)=x=\frac{1}{\lambda}y+\frac{1}{\lambda}Tx,$$

即

$$(\lambda I-T)x=y.$$

因为 y 是任意的, 说明当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, $\lambda I-T$ 的值域是全空间 X. $(\lambda I-T)^{-1}$ 是定义在全空间 X 上的有界线性算子, 即 $\lambda I-T$ 有有界逆算子.

注 $\lambda I-T$ 有没有逆算子, 逆算子是否有界, 是不是定义在全空间上, 这些在谱分析中是十分重要的. 一般地, $\lambda I-T$ 的逆算子存在、有界, 并且定义在全空间上, 称 $\lambda I-T$ 有有界逆算子.

进一步我们有

定理 1.2.22 (Banach-Steinhaus 一致有界原则) 设 $\{T_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是 Banach 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族, 如果对于 $\forall x\in X$,

$$\sup_\alpha\|T_\alpha x\|<\infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\||\alpha\in I\}$ 是有界集.

定理 1.2.23 (Banach 逆算子定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子 T^{-1} 是有界线性算子.

定理 1.2.24 (闭图像定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 中的闭的线性算子, 则 T 是有界线性算子.

注 定理 1.2.22 中的 $\{T_\alpha\}$, 定理 1.2.23 中的 T^{-1}, 定理 1.2.24 中的 T , 其定义域都是全空间 (Banach 空间). 闭线性算子的定义参阅定义 3.1.2.

以上相关定理的证明可参阅有关泛函分析的文献 [7], [18], [22], [24]~[26].

习 题 1.2

1. 考虑 $L^2(-\infty,\infty)$ 到其自身上的映射

$$T:\ x(t)\to x(-t).$$

问 T 是否为连续线性算子.

2. 设 M_n 表示 $n\times n$ 的实矩阵空间, 对于 $A=(a_{ij})\in M_n$, 定义 $n(A)=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|$.

(1) 证明 $\|Ax\|_1\leqslant n(A)\|x\|_1$, 这里 $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 具有范数 $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$;

(2) 设 $A,B\in M$. 证明 $n(AB)\leqslant n(A)n(B)$;

(3) 设 $\|A\|=\inf\{M|\,\|Ax\|\leqslant M\|x\|,\forall x\in\mathbb{R}^n\}$, 这里 $X=Y=\mathbb{R}^n$, 比较 $n(A)$ 和 $\|A\|$ 在什么时候相等.

3. 设 X,Y 是赋范线性空间, 证明若 Y 不是完备的且 $X\neq\{0\}$, 则 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 不完备.

4. 设 X,Y 是赋范线性空间, $L_n(n=1,2,\cdots)$ 是从 X 到 Y 的连续线性算子, 假定 L 是从 X 到 Y 的映射, 并且对任意 $n=1,2,\cdots$, 存在 $M_n\geqslant 0$ 使得 $\|Lx-L_nx\|\leqslant M_n\|x\|\ (\forall x\in X)$. 另外 $M_n\to 0(n\to\infty)$. 证明 L 是从 X 到 Y 的连续线性映射 (题目说明若序列 $\{L_n\}$ 一致收敛, 则它的极限必是连续的、线性的).

5. (接第 4 题) 假若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_nx-Lx\|=0,\forall x\in X$, 也就是说 L_n 强收敛于 L, 则 L 是线性的.

6. 设 B 是 Banach 空间 $L^2(-\infty,\infty)$, 并令 $L:B\to B$ 由 $(Lx)(t)=kx(t+\tau)$ 给定. 这里 $\tau>0,|k|<1$. 考虑差分方程 $(I+L)x=y$. 证明对于给定的 y 来说, 解 x 是

$$x(t)=y(t)-ky(t+\tau)+k^2y(t+2\tau)-k^3y(t+3\tau)+\cdots.$$

7. 设 X 是赋范线性空间, 并且任何线性映射 $L:X\to Y$ 是连续的, 证明 X 是有限维的.

8. 证明有限维线性赋范空间上的每个线性算子都是有界的.

9. 对任何 $f\in L[a,b]$, 作 $(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 把 T 视为 $L[a,b]\to C[a,b]$ 的算子时, 试证明 $\|T\|=1$.

10. 设 X 是赋范线性空间, f 是 X 上的连续线性泛函的充要条件是 f 的零空间 $\mathcal{N}=\{x|f(x)=0\}$ 为 X 中的闭子空间.

11. 在 $C[0,1]$ 上定义线性泛函

$$f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 (1) f 是连续的;

(2) $\|f\|=1$;

(3) 不存在 $x\in C[0,1]$, $\|x\|\leqslant 1, f(x)=1$.

12. 考虑算子 T: $C^1[-1,1]\to C[-1,1]$,

$$(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\quad \forall x\in C^1[-1,1],$$

这里 $C^1[-1,1]$ 是在 $[-1,1]$ 中一阶导数连续的全体函数.

(1) 若 $C^1[-1,1]$ 中的范数是

$$\|x\|_1=\max\left\{\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|, \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|\right\},$$

问 T 是否有界;

(2) 若 $C^1[-1,1]$ 中的范数是

$$\|x\|_2=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

问 T 是否有界.

13. 设 X,Y 是线性赋范空间, T: $X\to Y$ 是线性算子, 则 T 连续当且仅当 T 将 X 中的每个 Cauchy 序列映射为 Y 中的 Cauchy 序列.

14. 对于每个 $\alpha(t)\in C[a,b]$, 定义线性算子 T: $L^1[a,b]\to L^1[a,b]$, $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$, 证明 $\|T\|=\|\alpha\|$, 其中 $\|\alpha\|$ 表示 $\alpha(t)$ 在 $C[a,b]$ 中的范数.

15. 设 T 是 $C[a,b]$ 上有界线性算子, 记

$$Tt^n=f_n(t),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

证明 T 完全由函数列 $\{f_n(t)\}$ 唯一确定.

16. 设 $\alpha(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 令

$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t),\quad x\in C[a,b],$$

则 T 是由 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子的充要条件是 $\alpha(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

17. 设 $\alpha(t)$ 是定义在有界可测集 E 上的函数. 令

$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t),\quad x\in L^2(E),$$

则 T 是由 $L^2(E)$ 到其自身的有界线性算子的充要条件是 $\alpha(t)$ 在 E 上可测且本性有界.

18. 设无穷矩阵 (a_{kj}) 适合条件

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}<+\infty,$$

算子 T 定义如下:

$$y=Tx,\quad \eta_j=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kj}\xi_k,\quad k=1,2,3,\cdots,$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\},y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 证明 T 是由 L^p 到其自身的有界线性算子.

19. 考虑 $C[0,1]$ 上的算子序列 $\{T_n\}$, 其中 $\{T_nx\}(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子, 但不依算子范数收敛于该算子.

20. 设 E, E_1, E_2 都是 Banach 空间, T_n, $T\in\mathfrak{B}(E,E_1)$, S_n, $S\in\mathfrak{B}(E_1,E_2)$, 若 $\{T_n\}$, $\{S_n\}$ 分别强收敛于 T, S, 证明 $\{S_nT_n\}$ 强收敛于 ST.

§1.3 共轭算子

1.3.1 Banach 空间上的共轭算子

共轭算子在线性算子理论、谱理论中扮演着十分重要的角色.

设 X 是一个赋范空间, $\mathbb{K}$ 是数域, 由定理 1.2.11 的注可知, $\mathfrak{B}(X,\mathbb{K})$ 是 Banach 空间, 记 $X^*=\mathfrak{B}(X,\mathbb{K})$. 称 X^* 是 X 的共轭空间, 即 X^* 是 X 上所有有界线性泛函构成的赋范空间. 由于 X^* 是一个 Banach 空间, 因此它也有共轭空间. 记 $X^{**}=(X^*)^*$, 称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间. 如果 $X=X^{**}$(在典型映射等距同构的意义下), 则称 X 是自反的.

定义 1.3.1 设 X,X_1 是 Banach 空间, $T\in\mathfrak{B}(X,X_1)$. 对于 $f\in X_1^*$, 令

$$(T'f)(x)=f(Tx),\quad \forall x\in X,\tag{1.3.1}$$

则称 T' 是 T 的 Banach 共轭算子.

显然 T' 是从 X_1^* 到 X^* 的线性算子.

定理 1.3.2 T' 是有界线性算子 T 的 Banach 共轭算子, 则

(1) T' 是有界线性算子, 并且 $\|T'\|=\|T\|$;

(2) 对于 $\alpha\in\mathbb{K}$, $(\alpha T)'=\alpha T'$;

(3) $(T_1+T_2)'=T_1'+T_2'$;

(4) $(T_1T_2)'=T_2'T_1'$;

(5) 若 T 有有界的逆算子, 则 T' 也有有界的逆算子且

$$(T')^{-1}=(T^{-1})'.$$

证明 显然 T' 是线性算子, 由于

$$|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant \|f\|\,\|Tx\| \leqslant \|f\|\,\|T\|\,\|x\|, \quad \forall f \in X_1^*, x \in X,$$

因此

$$\|T'f\| \leqslant \|T\|\,\|f\|, \quad f \in X_1^*,$$

即 T' 是有界线性算子并且 $\|T'\| \leqslant \|T\|$.

另外, 如果 $T \neq 0$, 根据 Hahn-Banach 定理, 对于 $\forall Tx \neq 0$, 存在 $f_0 \in X_1^*$, 使得

$$\|f_0\| = 1, \quad f_0(Tx) = \|Tx\|.$$

所以

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \|f_0(Tx)\| &= |(T'f_0)(x)| \leqslant \|T'f_0\|\,\|x\| \\ &\leqslant \|T'\|\,\|f_0\|\,\|x\| = \|T'\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

故 $\|T\| = \|T'\|$.

(2)~(4) 是显然的.

(5) 由于 $T^{-1} \in \mathfrak{B}(X_1, X)$, 因此 $(T^{-1})' \in \mathfrak{B}(X^*, X_1^*)$. 对于 $x \in X, f \in X^*$, 由定义

$$\left(T'(T^{-1})'f\right)(x) = \left((T^{-1})'f\right)(Tx) = f\left(T^{-1}Tx\right) = f(x),$$

所以 $T'(T^{-1})'f = f$, 即 $T'(T^{-1})' = I_{X^*}$.

同样可证 $(T^{-1})'T' = I_{X_1^*}$, 即 $(T')^{-1} = (T^{-1})'$. □

1.3.2 Riesz 定理和 Lax-Milgram 定理

本小节把注意力重点放在当 X 是 Hilbert 空间时, 其上的共轭算子. 可以使用另外的方法定义 Hilbert 空间中的共轭算子.

定理 1.3.3 (Riesz 表示定理) 设 H 是一个 Hilbert 空间, f 是 H 上定义的有界线性泛函, 则存在唯一的 $y_f \in H$, 使得

$$f(x) = (x, y_f), \quad \forall x \in H, \tag{1.3.2}$$

并且

$$\|f\| = \|y_f\|. \tag{1.3.3}$$

证明 如果 $f = 0$, 取 $y_f = 0$ 即可. 假定 $f \neq 0$, f 连续, f 的零空间 $M = \mathcal{N}(f) = \{x \in H | f(x) = 0\}$ 是 H 的真闭子空间, 根据定理 1.1.33, $H = M \oplus M^{\perp}$. 由于 $M^{\perp} \neq \varnothing$, 存在 $x_0 \in M^{\perp}$ 且 $\|x_0\| = 1$. 对于 $\forall x \in H$, 令

$$z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0,$$

显然 $f(z)=0$, $z\in M$, $(z,x_0)=0$, 于是有分解

$$x=z+\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, \tag{1.3.4}$$

其中 $z\in M$, $x_0\in M^{\perp}$. 在上式两边同时与 x_0 作内积, 有

$$(x,x_0)=(z,x_0)+\frac{f(x)}{f(x_0)}=\frac{f(x)}{f(x_0)},$$

即

$$f(x)=f(x_0)(x,x_0)=(x,\overline{f(x_0)}x_0).$$

令 $y_f=\overline{f(x_0)}x_0$, 有

$$f(x)=(x,y_f).$$

唯一性. 如果存在 g_f, 使得对于任何 $x\in H$, $f(x)=(x,g_f)$, 则有

$$(x,y_f)=(x,g_f),\quad \forall x\in H,$$

所以 $g_f=y_f$. 由于

$$\|f\|=\sup_{|x|\leqslant 1}|f(x)|=\sup_{|x|\leqslant 1}|(x,y_f)|\leqslant\|y_f\|,$$

且

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|\geqslant\left|f\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}\right)\right|=\left(\frac{y_f}{\|y_f\|},y_f\right)=\|y_f\|.$$

所以 $\|f\|=\|y_f\|$. □

注 1　Riesz 表示定理显示, Hilbert 空间中的连续线性泛函有一个十分简单的表示. 事实上, 当 $H=\mathbb{R}^3$ 时,

$$f(x)=ax_1+bx_2+cx_3=n\cdot x,\quad \forall x\in\mathbb{R}^3, \tag{1.3.5}$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3), n=(a,b,c)$, 即相应的 $y_f=n, n$ 是平面 $f(x)=0$ 的法向量.

注 2　从证明中可知, 线性泛函 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 的正交补集 $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ 是一维的.

注 3　由 Riesz 表示定理, 任意的 $f\in H^*$, 对应唯一的 $y_f\in H$, 使 $f(x)=(x,y_f)$. 另一方面, 对于任意的 $y\in H$, 令

$$f_y(x)=(x,y),\quad \forall x\in H. \tag{1.3.6}$$

显然 f_y 是 H 上的连续线性泛函, 即 $f_y \in H^*$. 于是, 我们定义了一个映射 τ: $H^* \to H$,

$$\tau(f) = y_f, \quad \forall f \in H^*, \tag{1.3.7}$$

τ 是 H^* 到 H 的一一对应的保范映射. τ 不是线性的, 但是共轭线性的, 即

$$\tau(\alpha f_1 + \beta f_2) = \bar{\alpha}\tau(f_1) + \bar{\beta}\tau(f_2). \tag{1.3.8}$$

在 H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \quad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{1.3.9}$$

则 H^* 是一个 Hilbert 空间, τ 是 $H^* \to H$ 两个 Hilbert 空间之间的共轭同构映射. 如果对共轭同构的 Hilbert 空间不加区别, 于是 $H^* = H$, 即 H^* 在共轭同构的意义下看成与 H 等同, 因此可以说 Hilbert 空间是自共轭的.

由 Riesz 定理, 可以有下面的十分重要的 Lax-Milgram 定理.

定义 1.3.4 设 H 是一个 Hilbert 空间, $a(x,y)$ 是从 $H \times H$ 到 $\mathbb{C}$ 中的函数, 满足:

(1) $a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x,z) + \beta a(y,z)$;

(2) $a(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} a(x,y) + \bar{\beta} a(x,z)$,

其中 $x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 则称 $a(x,y)$ 为共轭双线性函数.

定理 1.3.5 (Lax-Milgram) 设 $a(x,y)$ 是 Hilbert 空间上的一个共轭双线性函数, 满足:

(1) 存在 $M > 0$, 使得

$$|a(x,y)| \leqslant M \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H; \tag{1.3.10}$$

(2) 存在 $m > 0$, 使得

$$|a(x,x)| \geqslant m \|x\|^2, \quad \forall x \in H, \tag{1.3.11}$$

那么存在唯一的有连续逆的有界线性算子 $A \in \mathfrak{B}(H)$, 满足

$$a(x,y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H, \tag{1.3.12}$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} |a(x,y)| / \|x\| \|y\|, \tag{1.3.13}$$

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}. \tag{1.3.14}$$

证明　固定 $y \in H$, 由 $x \to a(x,y)$ 定义了一个 H 上的有界线性泛函, 由 Riesz 表示定理, 存在 $z = z(y) \in H$, 使得

$$a(x,y) = (x,z), \quad \forall x \in H.$$

定义映射 A: $y \to z(y)$, 于是 $a(x,y) = (x, Ay)$ $(\forall x, y \in H)$. 以下证明 A 是线性的. 事实上, 对 $\forall x, y_1, y_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}&(x, A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = a(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\\ =&\bar{\alpha}_1 a(x,y_1) + \bar{\alpha}_2 a(x,y_2) = \bar{\alpha}_1 (x, Ay_1) + \bar{\alpha}_2 (x, Ay_2),\end{aligned}$$

而且由 (1.3.10),

$$\|Ay\| = \sup_{x\in H, x\neq 0} |a(x,y)|/\|x\| \leqslant M\|y\|, \tag{1.3.15}$$

于是 $A \in \mathfrak{B}(H)$, 且 (1.3.13) 成立.

以下证明 A 是单射. 事实上, 如果有 $y_1, y_2 \in H$, 满足 $Ay_1 = Ay_2$, 则

$$a(x,y_1) = a(x,y_2),$$

从而

$$a(x, y_1 - y_2) = 0, \quad \forall x \in H.$$

特别地, 令 $x = y_1 - y_2$, 由 (1.3.11) 知 $y_1 = y_2$.

再证 A 是满射. 先证 A 的值域是闭的. 事实上, $\forall \omega \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, 存在 $v_n \in H$, 使得

$$\omega = \lim_{n\to\infty} Av_n. \tag{1.3.16}$$

由 (1.3.11), 对于 $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&m\|v_{n+p} - v_n\|^2 \leqslant |a(v_{n+p} - v_n, v_{n+p} - v_n)|\\ =&|(v_{n+p} - v_n, A(v_{n+p} - v_n))| \leqslant \|v_{n+p} - v_n\| \|Av_{n+p} - Av_n\|,\end{aligned}$$

于是

$$\|v_{n+p} - v_n\| \leqslant \frac{1}{m}\|Av_{n+p} - Av_n\| \to 0 \quad (n \to \infty, \forall p \in \mathbb{N}).$$

我们有 $\{v_n\}$ 是 Cauchy 列, 因此存在 $v^* \in H$, 使得 $v_n \to v^*$, 由 A 的连续性和 (1.3.16) 知 $\omega = Av^*$, 即 $\omega \in \mathcal{R}(A)$, 于是 $\mathcal{R}(A)$ 闭.

再证 $\mathcal{R}(A)^\perp = \{0\}$, 假如 $\omega \in \mathcal{R}(A)^\perp$, 则

$$(\omega, Av) = 0, \quad \forall v \in H,$$

即 $a(\omega,v)=0,\forall v\in H$. 特别地, 取 $v=\omega$, 有

$$m\|\omega\|^2\leqslant|a(\omega,\omega)|=0,$$

即 $\omega=0$. 由此可知 A 是满射.

因为

$$m\|x\|^2\leqslant|a(x,x)|=|(x,Ax)|\leqslant\|x\|\,\|Ax\|,$$

所以 $m\|x\|\leqslant\|Ax\|,\ \forall x\in H$. 由定理 1.2.18, A^{-1} 存在, 且

$$\|A^{-1}\|\leqslant\frac{1}{m}.$$ □

1.3.3 Hilbert 空间上的共轭算子

下面在 Hilbert 空间 H 上定义共轭算子, 设 $A\in\mathfrak{B}(H)$, 对于任意的 $x,y\in H$, 易见 (Ax,y) 是 $H\times H$ 上的共轭双线性函数, 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一的有界线性算子 $B\in\mathfrak{B}(H)$, 使得

$$(Ax,y)=(x,By),\quad\forall x,y\in H.\tag{1.3.17a}$$

由于 $|(Ax,y)|\leqslant\|A\|\,\|x\|\,\|y\|$, 结合 (1.3.13), 有 $\|B\|\leqslant\|A\|$.

定义 1.3.6 设 H 是 Hilbert 空间, $A\in\mathfrak{B}(H)$, 把由 (1.3.17a) 确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子, 记为 A^*, 即

$$(Ax,y)=(x,A^*y),\quad\forall x,y\in H.\tag{1.3.17b}$$

如果把 Hilbert 空间 H 作为赋范空间来考虑, 根据定义 1.3.1, 可以定义 A 的 Banach 共轭算子 A'. 下面考虑这两种共轭算子定义之间的关系. 由 Riesz 表示定理 (定理 1.3.3) 的注 3, H^* 和 H 在共轭同构意义下看成是等同的, τ 是从 H^* 到 H 的映射, $\tau(f)=y_f, f(x)=(x,y_f)$. 反之, 对于任意的 $y\in H, f_y(x)=(x,y)$, 即 $\tau^{-1}(y)=f_y$ 是 H 上的有界线性泛函. 由 (1.3.1) , $A'(f_y)$ 是 H 上的有界线性泛函, 由 Riesz 表示定理, 存在 $z\in H$, 使得 $(A'(f_y))(x)=(x,z)$, 即 $A'(f_y)=f_z$. 根据定义 1.3.1, $f_z(x)=(A'(f_y))(x)=f_y(Ax)$, 即

$$(x,z)=(Ax,y)=(x,\tau A'\tau^{-1}y).\tag{1.3.18}$$

因此, 对于 Hilbert 空间由 (1.3.17) 定义的共轭算子 $A^*=\tau A'\tau^{-1}$.

以后对于 Hilbert 空间中的有界线性算子 A 的共轭算子均指由 (1.3.17) 定义的算子 A^*, 即在 Hilbert 空间 H 中, A 是一个有界线性算子, A 的共轭算子 A^* 定义如下:

$$(Ax,y)=(x,A^*y),\quad\forall x,y\in H.\tag{1.3.19}$$

容易验证, Hilbert 空间上的共轭算子满足 $I^* = I$, $0^* = 0$. 由共轭算子的定义 (1.3.19) 可以证明

定理 1.3.7　设 A, B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则

(1) 共轭算子 A^* 是有界线性算子, 并且 $\|A^*\| = \|A\|$, 进一步有 $(A^*)^* = A$;

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

(3) $(AB)^* = B^*A^*$;

(4) 对于常数 $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

(5) 若 A^{-1} 存在且有界, 则 $(A^*)^{-1}$ 也存在且有界, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明　(1) 因为

$$\begin{aligned}&(x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ax, (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = \overline{\alpha}_1 (Ax, y_1) + \overline{\alpha}_2 (Ax, y_2)\\ =&\overline{\alpha}_1 (x, A^* y_1) + \overline{\alpha}_2 (x, A^* y_2) = (x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2),\end{aligned}$$

A^* 是线性算子. 且

$$\|A^*y\|^2 = (A^*y, A^*y) = (AA^*y, y) \leqslant \|AA^*y\| \, \|y\| \leqslant \|A\| \, \|A^*y\| \, \|y\| ,$$

于是有 $\|A^*y\| \leqslant \|A\| \, \|y\|$, 即

$$\|A^*\| \leqslant \|A\| . \tag{1.3.20}$$

在 (1.3.19) 中用 A^* 代替 A, 可以定义 $(A^*)^* = A^{**}$, 即

$$(A^*x, y) = (x, A^{**}y).$$

因此, 对于任何的 $x, y \in H$, 有

$$\overline{(x, Ay)} = (Ay, x) = (y, A^*x) = \overline{(A^*x, y)}.$$

于是有

$$(x, Ay) = (x, A^{**}y), \quad \forall x, y \in H,$$

即 $(A^*)^* = A$. 在 (1.3.20) 中用 A^* 替换 A 有

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\| .$$

因此 $\|A\| = \|A^*\|$.

(2)~(4) 容易验证.

(5) 由于 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, 根据 (3),

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

$$(A^{-1})^*(A)^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

即 $(A^*)^{-1}$ 存在, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. □

注 十分重要的是, Hilbert 空间 H 上的有界线算子 A 和它的共轭算子 A^* 是定义在同一个空间上的, 即 $A, A^* \in \mathfrak{B}(H)$. 以这样方式定义的 A^* 和定义 1.3.1 定义的 A' 性质略有不同, 对于 $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. 而在定义 1.3.1 中, $(\alpha A)' = \alpha A'$.

推论 1.3.8 $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$.

证明 由于 $\|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$, 同时

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leqslant \|A^*Ax\| \, \|x\| \leqslant \|A^*A\| \, \|x\|^2,$$

即 $\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\|$. □

1.3.4 共轭算子的例

例 1.3.9 令 $H = \mathbb{C}^n$, 其上定义的内积为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i,$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$, A 是例 1.2.4 中的线性算子:

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

即 $Ax = z, z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \cdots, \varsigma_n)$, 其中 $\varsigma_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 由于

$$\begin{aligned}(Ax, y) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \right) \overline{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{\eta}_i \right) \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}\eta_i \right)} \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ji}\eta_j \right)},\end{aligned}$$

有 $A^* = (a_{ij})^* = (\overline{a}_{ji})$, 即 A^* 是 A 的转置共轭.

例 1.3.10 记 $H = L^2(I)$, 其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个可测集合. $k(s, t)$ 是 $I \times I \to \mathbb{C}$ 的函数, 满足

$$\int_I \int_I |k(s,t)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t < \infty.$$

由例 1.2.5, K 是 $L^2(I)$ 到 $L^2(I)$ 的线性算子, 定义为 $z = Kx$, 其中

$$z(s) = \int_I k(s,t)x(t) \, \mathrm{d}t. \tag{1.3.21}$$

由于

$$(Kx,y)=\int_I\left[\int_I k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t\right]\overline{y(s)}\,\mathrm{d}s=\int_I\int_I[k(s,t)x(t)]\overline{y(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_I x(t)\overline{\left[\int_I\overline{k(s,t)}y(s)\,\mathrm{d}s\right]}\,\mathrm{d}t=(x,K^*y).$$

因此

$$K^*y(s)=\int_I\overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t=\int_I k^*(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 K^* 也是积分算子, 且 $k^*(s,t)=\overline{k(t,s)}$.

例 1.3.11 令 $I=[0,T]$, 考虑 Volterra 积分算子 K: $y=Kx$, 其中

$$y(t)=\int_0^t k(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.3.22}$$

如果令 $k(t,\tau)=0$, 对于 $t<\tau$, 那么 (1.3.22) 成为 (1.3.21), 因此 K 的共轭算子 K^* 为

$$(K^*y)(t)=\int_0^T\overline{k(\tau,t)}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_t^T\overline{k(\tau,t)}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

即 Volterra 积分算子的共轭算子, 还是一个 Volterra 积分算子. 但是如果 K 依赖于 "过去", 则 K^* 依赖于 "未来".

例 1.3.12 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上考虑乘法算子

$$F:\ x(t)\to f(t)x(t),$$

其中 $|f(t)|\leqslant B<\infty$ 几乎处处成立.

容易验证, F 是一个有界线性算子且

$$\|F\|=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|=\|f\|_\infty.$$

由于

$$(Fx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\overline{f(t)}y(t)}\,\mathrm{d}t=(x,F^*y).$$

有

$$F^*:\ y(t)\to\overline{f(t)}y(t).$$

习 题 1.3

1. 设 T 为 l^2 上的有界线性算子, 对于 $\forall x=\{\xi_k\}\in l^2$, 令 $Tx=y=\{\eta_k\}$, 其中

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}\xi_j,\quad k=1,2,3,\cdots,$$

设 $T^*x = y^* = \{y_k^*\}$, $y_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \xi_j$. 证明 $a_{kj}^* = \overline{a_{jk}}$.

2. 试求下列定义在 l^p 上的线性算子的共轭算子:

(1) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{0, x_1, x_2, \cdots\}$;

(2) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots\}$, 其中 $\{\alpha_k\}$ 是有界数列;

(3) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots\}$, 其中 n 是给定的;

(4) $T\{x_1, x_2, \cdots\} = \{\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \cdots\}$, 其中 $\{\alpha_k\}$ 是有界数列, n 是给定的.

3. 试求下列在 $L^2(-\infty, \infty)$ 上定义的线性算子的共轭算子:

(1) $(Tx)(t) = x(t+h)$(h 是给定的实数);

(2) $(Tx)(t) = a(t)x(t+h)$ ($a(t)$ 是有界可测函数, h 是给定的实数);

(3) $(Tx)(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$.

4. 设 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基, $x \in \mathbb{R}^n, x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 如果在 $\mathbb{R}^n$ 上定义范数为

(1) $\|x\| = \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|$;

(2) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|$.

试分别求出 $(\mathbb{R}^n)^*$ 的范数.

5. 设 L 是从 l_2 到 l_2 的线性算子, 即 $(y_1, y_2, \cdots) = L(x_1, x_2, \cdots)$, 其中

$$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n^2}.$$

证明 L 是有界线性算子且 $\|L\| \leqslant \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}$, 并求出 L^*.

6. 设 T: $l_2 \to l_2$,

$$T(x_1, x_2, \cdots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right).$$

求 T^*.

7. 设 L 是 Hilbert 空间 H 到 H 上的有界线性算子, 证明 L 是等距的当且仅当 L^* 是等距的.

8. 设 $g = Sf, g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin xy f(y)\, \mathrm{d}y$. 证明 S 是 $L_2[0, \infty)$ 到其自身上的酉算子且 $S^{-1} = S$ (酉算子的定义见定义 2.8.4).

9. 设 $(H_1, (\cdot,\cdot)_1), (H_2, (\cdot,\cdot)_2)$ 是 Hilbert 空间, L: $H_1 \to H_2$ 是有界线性算子. 定义 L^*: $H_2 \to H_1$, $(y, Lx)_2 = (L^*y, x)_1$, $\forall x \in H_1, y \in H_2$. 证明

(1) L^* 是有界线性算子;

(2) $L = L^{**}$;

(3) $\|L\| = \|L^*\|$.

10. 设 L 是 Hilbert 空间 H 到自身的有界线性算子, 证明 $\mathcal{R}(L) = H$ 当且仅当 L^* 有连续的逆.

11. 设 T 为完备内积空间 H 中的有界线性算子, 且 $\|T\|\leqslant 1$, 证明

$$\{x|Tx=x\}=\{x|T^*x=x\}.$$

12. 设 A 为空间 H 上的有界线性算子, 证明 $A^*=-A$ 的充要条件为对任何 $x\in H$, $\mathrm{Re}(Ax,x)=0$.

13. 设 $\{\eta_n\}$ 为一数列, 若对一切 $x=\{\xi_n\}\in l^q(1\leqslant q\leqslant\infty)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$ 收敛, 则 $\{\eta_n\}\in l^p$. $\left(当 1<q<\infty 时, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1; 当 q=1 时, p=+\infty; 当 q=+\infty 时, p=1.\right)$

14. 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 如果对任意 $g(t)\in L^q[a,b](1\leqslant q\leqslant+\infty)$, 有 $f(t)g(t)\in L[a,b]$, 则 $f(t)\in L^p[a,b]$ (这里的 p,q 与上题相同).

15. 设 X 为线性赋范空间, X^* 是 X 的共轭空间, $x_n,x\in X$, $f_n,f\in X^*$. 若 $x_n\xrightarrow{w}x$, $f_n\xrightarrow{w}f$, 则 $f_n(x_n)\to f(x)\,(n\to\infty)$.

16. 若 $T_n,T\in\mathfrak{B}(X,Y)\,(n=1,2,\cdots)$, 当 $\|T_n-T\|\to 0$ 时, $\|T_n^*-T^*\|\to 0\ (n\to\infty)$.

17. 设 X、Y 都是赋范线性空间, $T\in\mathfrak{B}(X,Y)$. 证明 T 是由 X 到 Y 上的等距同构映射的充要条件是 T' 为由 Y^* 到 X^* 上的等距同构映射, 这里 T' 是 T 的 Banach 共轭算子.

18. 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 中的一个点列, 如果对于每个 $f\in X^*$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty$, 则必存在正数 μ, 使得对一切 $f\in X^*$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant\mu\|f\|$.

§1.4 投 影 算 子

1.4.1 互补的线性子空间和投影算子

在有限维空间, 线性算子的结构和空间的分解密切相关, 而空间的分解是和特征投影联系在一起的. 在无穷维空间我们希望有类似的分解性质.

定义 1.4.1 设 X 是线性空间, X_1,X_2 是 X 中的两个线性子空间, 并且 $X_1\cap X_2=\{0\}$, 即 X_1 和 X_2 只有唯一的公共元素 0, 用 $X_1\dot{+}X_2$ 表示全体形如 x_1+x_2 元素的集合, 其中 $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, 即

$$X_1\dot{+}X_2=\{x_1+x_2\,|\,x_1\in X_1,x_2\in X_2\},\tag{1.4.1}$$

称 $X_1\dot{+}X_2$ 为 X_1 和 X_2 的直接和. 如果 X 是 Hilbert 空间, 且 $X_1\perp X_2$, 那么有 $X_1\cap X_2=\{0\}$, 在这种情况下称直接和 $X_1\dot{+}X_2$ 为正交和, 记为 $X_1\oplus X_2$.

显然, 由于 $X_1\cap X_2=\{0\}$, $x=x_1+x_2$ 的分解表示是唯一的. 以上定义可以推广到任意有限个线性子空间的直接和、正交和.

如果 $X=X_1\dot{+}X_2$, 则称 X_1 与 X_2 是代数互补的线性子空间, X_2 是 X_1 在 X 中的代数补. 可以证明, 如果 X_1 是线性空间中的线性子空间, 则存在 X 中的线性子空间 X_2, X_2 是 X_1 的代数补, 使得 $X=X_1\dot{+}X_2$.

设 X_1 和 X_2 是 X 的线性子空间, 且 $X = X_1 \dotplus X_2$. 考察映射 P:

$$Px = x_1,\ x = x_1 + x_2,\ x_j \in X_j, \quad j = 1, 2.$$

可以看出, P 是定义在 X 上, 值域为 X_1 的线性算子, 即 P 是从 X 上到 X_1 中的投影, 从几何观点看, P 是沿着 X_2 方向到 X_1 上的投影, 且 $P^2 = P$(幂等的).

定义 1.4.2 从线性空间 X 上到它自身的线性算子 P 称为是投影算子, 如果 $P^2 = P$.

注 $P^2 = P$ 并不意味着 P 是线性算子.

定理 1.4.3 设 P 是线性空间 X 上的投影算子, 那么 P 的值域 $\mathcal{R}(P)$ 和 P 的零空间 $\mathcal{N}(P)$ 满足: $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$, 且 $X = \mathcal{R}(P) \dotplus \mathcal{N}(P)$, 即 $\mathcal{R}(P)$ 和 $\mathcal{N}(P)$ 互为另一个的代数补.

证明 设 $x \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P)$, 因为 $x \in \mathcal{R}(P)$, 则存在 $y \in X$, 使得 $Py = x$, 且 $P^2 y = P(Py) = Px = x$, 又因为 $x \in \mathcal{N}(P)$, 所以 $Px = 0$, 于是 $x = 0$, 即 $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$. 对于任意的 $x \in X$, 定义 $y = Px$, $z = x - y$. 我们有 $x = y + z$, $y \in \mathcal{R}(P)$, 且 $P(z) = P(x - y) = Px - Py = Px - P^2 x = 0$, 即 $z \in \mathcal{N}(P)$. □

注 1 对于任何的 $x \in X$, 存在唯一确定的表示形式, $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in \mathcal{R}(P)$, $x_2 \in \mathcal{N}(P)$, 且 $Px = x_1$, 即 P 是沿着子空间 $\mathcal{N}(P)$ 到子空间 $\mathcal{R}(P)$ 上的投影.

注 2 P 是投影算子, $I - P$ 也是投影算子, $\mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P)$, 并且 $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{R}(P)$, $(I - P)x = x_2$, 如果 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{R}(P)$, $x_2 \in \mathcal{N}(P)$.

定理 1.4.4 M 和 N 是线性空间 X 的线性子空间, 且 $M \cap N = \{0\}$, $M \dotplus N = X$. 那么存在一个定义在 X 上的投影算子 P, 使得 $\mathcal{R}(P) = M$, $\mathcal{N}(P) = N$.

证明 对于 $\forall x \in X$, 存在唯一的分解 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in N$, 只要定义 $Px = x_1$ 即可. □

1.4.2 连续的投影算子

内积空间中的投影算子是我们十分感兴趣的, 并且是十分重要的.

定义 1.4.5 内积空间 X 上的投影算子 P 称为正交的, 如果它的值域和零空间相互正交, 即 $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

定理 1.4.6 正交投影算子是连续的.

证明 因为 P 是投影算子, 对于任意的 $x \in X$, $x = m + n$, 其中 $m \in \mathcal{R}(P)$, $n \in \mathcal{N}(P)$, $Px = m$. 因为 P 是正交的, $m \perp n$, 于是 $\|x\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2$, 所以 $\|Px\|^2 = \|m\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 即 P 是连续的. □

在 Banach 空间, 当 X_1 和 X_2 是闭的线性子空间时, 生成的投影算子也是连续的.

定理 1.4.7　设 X_1 和 X_2 是 Banach 空间 X 的闭子空间, 使得 $X = X_1 \dotplus X_2$, 则从 X 到 X_1 的投影算子 P 是连续的.

证明　由于 P 是从 X 上到 X_1 的线性算子, X 和 X_1 都是 Banach 空间, 根据闭图像定理, 只要证明 P 是闭算子即可. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 使得 $x_n \to x_0$, $Px_n \to x_0^{(1)}$. 由于 X_1 是闭的, $x_0^{(1)} \in X_1$, 且

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - Px_n) = x_0 - x_0^{(1)} \equiv x_0^{(2)}.$$

(这里 $\equiv$ 表示定义为) 注意到 $X = X_1 \dotplus X_2$, $Px_n \in X_1$, 于是 $x_n - Px_n \in X_2$, 由于 X_2 闭, $x_0 - x_0^{(1)} \in X_2$, 即 $x_0^{(2)} \in X_2$, 且 $x_0 = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}$. 根据分解的唯一性和投影算子的定义 $Px_0 = x_0^{(1)}$, 即 P 是闭算子. □

定义 1.4.8　设 X_1 和 X_2 是 Banach 空间 X 的闭子空间, 使得 $X = X_1 \dotplus X_2$, 则称 X_1 和 X_2 是拓扑互补的闭子空间, 称 X_2 是 X_1 的拓扑补.

对于一般的 Banach 空间, 不是它的任何闭子空间都存在与之拓扑互补的闭子空间. 但是当闭子空间是有限维的, 可以证明下面的定理.

定理 1.4.9　设 N 是 Banach 空间 X 中的有限维子空间, 则存在 X 中的闭子空间 M, 使得 $M \cap N = \{0\}$, 且

$$X = N \dotplus M.$$

证明读者可参阅 [26].

定理 1.4.10　设 P 是 Banach 空间 X 上的有界幂等的线性算子, 则

$$M \equiv \{x | Px = x\}, \quad N \equiv \{x | Px = 0\}$$

是拓扑互补的闭子空间, P 是从 X 到 M 的投影算子.

证明　由 P 的连续性知 M 和 N 是 X 的闭子空间. 如果 $x_0 \in M \cap N$, 则 $Px_0 = x_0$, $Px_0 = 0$, 知 $x_0 = 0$, 即 $M \cap N = \{0\}$. 对于 $\forall x \in X$, 有

$$x = Px + (x - Px).$$

由于 P 是幂等的, $Px \in M$, $x - Px \in N$, 有

$$X = M \dotplus N,$$

且对于 $\forall x \in M$, $Px = x$. □

例 1.4.11　设 $X = L^2(-\infty, \infty)$, 对于每一个固定的 T, 线性算子 P_T 是从 X 到它自身的线性算子, 对 $\forall x(t) \in L^2(-\infty, \infty)$,

$$P_T x = \begin{cases} x(t), & -\infty < t < T, \\ 0, & T < t < \infty. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

容易证明 P_T 是一个投影算子, 并且是一个正交投影算子.

例 1.4.12 设 X 是一个线性空间, $X_1, \cdots, X_n$ 是 X 的线性子空间, 使得 $X_i \cap \left(\sum\limits_{j=1(j\pm i)}^{n} X_j\right) = \{0\}(i = 1, \cdots, n)$, 并且 $X = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_n$. 令 $P_j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是 X 上的投影算子, 满足 $\mathcal{R}\,(P_j) = X_j$, $\mathcal{N}\,(P_j) = \sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{n} X_i$, 那么

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n, \tag{1.4.3}$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 属于数域, 定义了从 X 上到 X 线性算子.

T 在 X_j 上的限制 T_j 是从 X_j 到 X_j 的映射, 且 $T_j = \lambda_j I_j$, 其中 I_j 是 X_j 上的恒等算子. 如果 X 是有限维的, T 能够表示成一个对角型矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & 0 & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & & \lambda_n & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

还可以有 $P_i P_j = 0 (i \neq j)$, T 是一个投影算子当且仅当 $\lambda_j = 0$ 或者 $\lambda_j = 1 (j = 1, 2, \cdots, n)$. 称 (1.4.3) 定义的线性算子 T 为投影算子的加权和.

1.4.3 不变子空间和约化子空间

线性算子的谱分析, 特别是第二章要考虑正常算子和自共轭算子的谱分析, 对线性算子的结构将给出一个几何刻画, 其中不变子空间和约化子空间的概念是十分重要的.

定义 1.4.13 设 M 是线性空间 X 的子空间, T 是 X 上的线性算子,

$$T\,(M) \subset M, \tag{1.4.4}$$

则称 M 是 T 的不变子空间.

定理 1.4.14 设 X 是一个 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}\,(X)$, P 是从 X 到 M 中的投影算子, 则 M 是 T 的不变子空间当且仅当 $TP = PTP$.

证明 设 M 是 T 的不变子空间, 对于任意的 $x \in X, TPx \in T(M) \subset M$, 所以

$$PTPx = TPx.$$

反之, 对于任意的 $x \in M, Px = x$. 由于 $TP = PTP$, 所以 $Tx = TPx = PTPx = PTx \in M$, 即 M 是 T 的不变子空间. □

当 M 是 T 的不变子空间时, T 限制在 M 上, 可以定义一个从 M 到 M 的有界线性算子

$$(T\,|_M)(x) = Tx, \quad \forall x \in M \tag{1.4.5}$$

称为 T 在 M 上的限制.

定义 1.4.15 若 M 和 N 是 Banach 空间 X 中拓扑互补的闭子空间, 并且 M 和 N 都是 T 的不变子空间, 则称 M 和 N 约化算子 T, 即 M 和 N 是 T 的约化子空间.

注 在定理 1.4.7 的条件下, P 是有界线性算子, $\mathcal{R}(P)$ 和 $\mathcal{N}(P)$ 都是 X 的闭子空间, 根据定理 1.4.3, $\mathcal{R}(P)$ 和 $\mathcal{N}(P)$ 约化算子 P. 由于 $\mathcal{R}(I-P) = \mathcal{N}(P)$, 即 $\mathcal{R}(P), \mathcal{R}(I-P)$ 约化算子 P.

定理 1.4.16 M 和 N 是 Banach 空间 X 的闭子空间, M 和 N 约化算子 T 当且仅当 $PT = TP$, 其中 P 是沿着 N 到 M 上的投影算子.

证明 由于 P 是从 X 到 M 上的投影算子, $I - P$ 是从 X 到 N 上的投影算子. 根据定理 1.4.14 M 和 N 约化 T 的充分必要条件是 $TP = PTP$, 并且 $T(I-P) = (I-P)T(I-P)$, 于是有 $TP = PT$. □

例 1.4.17 设 $X = L^2(-\infty, \infty), I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, 令

$$M = \left\{ x \in L^2(-\infty,\infty) \,\middle|\, x(t) = 0,\ t \in \overline{I} \right\}.$$

F 是一个乘法算子

$$F\colon\ x(t) \to f(t)x(t),$$

其中 $\|f\|_\infty < \infty$. 显然可知, $F(M) \subset M$, 即 M 是 F 的不变子空间.

我们很重要的兴趣在于 Hilbert 空间 H 中的投影算子.

定理 1.4.18 设 T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界线性算子, M 是 H 的一个闭子空间, M 在 T 下是不变的充分必要条件是 $M^\perp$ 在 T^* 下是不变的.

证明 假设 M 在 T 下是不变的, 即 $T(M) \subset M$, 那么对于任意的 $y \in M^\perp$ 和 $x \in M$ 都有 $(y, Tx) = 0$, 于是 $(T^*y, x) = 0$, 这也就是说 $M^\perp$ 在 T^* 下是不变的. 同样由 $M^\perp$ 在 T^* 下不变, 可以推出 M 在 T 下是不变的. □

注意到 $M^{\perp\perp} = \overline{M}, T^{**} = T$, 有

推论 1.4.19 Hilbert 空间 H 的闭子空间 M 约化 T 当且仅当 M 在 T 和 T^* 下都是不变的.

定理 1.4.20 设 T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界线性算子, 那么

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \{\mathcal{N}(T^*)\}^\perp, \tag{1.4.6}$$

$$\{\mathcal{N}(T)\}^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(T^*)}, \tag{1.4.7}$$

其中 $\mathcal{R}(T)$ 和 $\mathcal{N}(T)$ 分别表示 T 的值域和零空间.

证明 由于 $z \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$ 当且仅当对于所有的 $x \in H$ 有 $(z, Tx) = 0$, 于是 $(T^*z, x) = 0, \forall x \in H$. 有 $z \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$ 当且仅当 $T^*z = 0$, 即 $\{\mathcal{R}(T)\}^{\perp} = \mathcal{N}(T^*)$, 注意到 $\{\mathcal{R}(T)\}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{R}(T)}$, (1.4.6) 得证. 由 $T^{**} = T$ 和 (1.4.6) 即可推出 (1.4.7). □

注 一般地, T 是从 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子, 记 $\mathcal{R}(T) = T(X)$, $\mathcal{N}(T) = \{x \in X \mid Tx = 0\}$. 对于任意的 $M \subset X$, $N \subset X^*$, 记

$$^{\perp}M = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 (\forall x \in M)\},$$

$$N^{\perp} = \{x \in X \mid f(x) = 0 (\forall f \in N)\}.$$

$^{\perp}M$ 称为 M 在 X^* 中的零化子, $N^{\perp}$ 称为 N 在 X 中的零化子, 零化子是内积空间中正交补的推广. 类似地, 有

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T')^{\perp}, \quad \overline{\mathcal{R}(T')} \subset {}^{\perp}\mathcal{N}(T), \tag{1.4.8}$$

其中 T' 是 T 的 Banach 共轭算子. 当 X 是自反时上式中等号成立.

习 题 1.4

1. 设 P 是线性空间 X 上的投影算子, 证明 P 的值域 $\mathcal{R}(P) = \{x \in X | Px = x\}$.

2. 设 $X = L^2[-\pi, \pi]$, $K(t, \tau) = \dfrac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=-10}^{10} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(t-\tau)}$, 证明

$$(Px)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(t, \tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau$$

是 X 上的投影算子.

3. 设 $X = C[0, T]$, 定义 P:

$$(Px)(t) = x(0)(1 - t), \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant T.$$

证明 P 是投影算子.

4. 设 $P(t)(-\infty < t < \infty)$ 是 $n \times n$ 投影矩阵, 即 $[P(t)]^2 = P(t)$, 假定 P 中的系数是连续可微函数, 考虑矩阵微分方程 $X' = (P'P - PP')X$, 这里 $P' = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$. 设 $X(t)$ 是上述方程的解. 证明 $P(t)X(t)$ 也是此方程的解.(提示: 证明 $PP'P = 0$.)

5. 设 P 和 Q 是线性空间 X 的投影算子.

(1) 若 $PQ = QP$, 则 PQ 是投影算子且

$$\mathcal{R}(PQ) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q), \quad \mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q);$$

(2) $P+Q$ 是投影算子当且仅当 $PQ=QP=0$, 在这种情况下,

$$\mathcal{R}(P+Q)=\mathcal{R}(P)+\mathcal{R}(Q), \quad \mathcal{N}(P+Q)=\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q).$$

6. 设 P 是 Hilbert 空间 H 上的连续投影算子, $P^*P=PP^*$, 则 P 是正交投影算子.

7. 设 P 是 Hilbert 空间 H 上的连续投影算子, $\|P\|\leqslant 1$, 则 P 是正交投影算子.

8. 设 X 是 Banach 空间, M_1、M_2 是 X 中闭的线性独立子空间, 则 $M_1\dotplus M_2$ 是闭的当且仅当存在 $d>0$, 使得 $\|x_1-x_2\|\geqslant d$, 对 $\forall x_1\in M_1, x_2\in M_2$, 且 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$ 都成立.

9. 设 P 是 Hilbert 空间 H 到子空间 M 上的正交投影, 则

$$\|(I-P)x\|=\operatorname{dist}(x,M), \quad x\in X.$$

10. 设 P 是完备内积空间 H 的闭子空间 L 上的投影算子, 则 $Px=x$ 的充分必要条件是 $x\in L$; $Px=0$ 的充要条件是 $x\perp L$.

11. 设 $\{e_k\}(k=1,2,\cdots)$ 是完备内积空间 H 中的正交系, L 是 $\{e_k\}$ 张成的线性子空间, 证明 $\overline{L}$ 上的投影算子 P 可以表示成 $Px=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$, $x\in H$.

12. 设 P_1, P_2 为可交换的投影算子, 则 $P=P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子, 且 $P\geqslant P_1$, $P\geqslant P_2$. 当任一投影算子 Q 满足 $Q\geqslant P_1$, $Q\geqslant P_2$ 时, 则必满足 $Q\geqslant P$. (注: $P\geqslant P_i$ 的定义见定义 1.5.17.)

13. A 为有界线性算子, L 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 若对于任何 $u\in L$, 有 $Au\in L, A^*u\in L$, 则 A 为 L 所约化.

14. 设 $\{P_\alpha|\alpha\in A\}$ 是一族投影算子, 证明存在投影算子 P, 使得对一切 $\alpha\in A$, 有 $P\geqslant P_\alpha$, 且对任何投影算子 Q, 当 $Q\geqslant P_\alpha$(对一切 $\alpha\in A$) 时, 有 $Q\geqslant P$. 记 $P=\sup\limits_{\alpha\in A}P_\alpha$.

15. 设 H 是可分的 Hilbert 空间, $\{P_\alpha|\alpha\in A\}$ 是一族投影算子. 证明必有 A 的有限或可列子集 A_0, 使 $\sup\limits_{\alpha\in A}P_\alpha=\sup\limits_{\alpha\in A_0}P_\alpha$.

16. 设 P 是 $L^2[a,b]$ 中的投影算子, 如果对 $[a,b]$ 上的任何有界可测函数 φ, 都有

$$(P(\varphi x))(t)=\varphi(t)(Px)(t), \quad x\in L^2[a,b].$$

证明存在 $[a,b]$ 的可测子集 E, 使得

$$(Px)(t)=\chi_E(t)x(t), \quad x\in L^2[a,b],$$

这里 $\chi_E(t)$ 是 E 的特征函数.

17. 设 H 是 Hilbert 空间, 若 $E\subset H$ 是线性子空间, 并且对于任意的 $x\in H$, x 在 E 上的投影存在, 则 E 是闭的.

18. 设 H 为 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的投影算子序列, 并且 $P_n\leqslant P_{n+1}(n=1,2,\cdots)$, 证明存在投影算子 P, 使得 $\{P_n\}$ 强收敛到 P.

19. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, L 是 H 的闭线性子空间, 如果 L 约化 A, 则

(1) L 也必约化 A^*;

(2) 如果 A^{-1} 存在, 并且是 H 上的有界算子, 则 L 也约化 A^{-1}.

20. 设 $P_n(n=1,2,\cdots)$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两直交的投影算子, 则必有投影算子 P, 使得对任何 $x\in H$, 有

$$Px=\sum_{i=1}^{\infty}P_ix.$$

§1.5 正常算子和自共轭算子

在 Hilbert 空间 H 中, A 是从 H 到 H 的有界线性算子, 由 (1.3.17) 定义的 A 的共轭算子 A^* 也是从 H 到 H 的有界线性算子, 于是可以研究 A 和 A^* 是否相等, 或者是否可以交换, 即它是否是自共轭的或者是正常的. 以后我们将看到, 这两类算子的谱分解是相对简单的. 以下的讨论限制在 Hilbert 空间上.

1.5.1 正常算子和自共轭算子的定义、例

定义 1.5.1 A 是 Hilbert 是空间 H 到 H 的有界线性算子. 如果 $AA^*=A^*A$, 则称 A 是正常算子. 进一步地, 如果 $A=A^*$, 则称 A 是自共轭的.

显然如果 A 是自共轭的, A 一定是正常的. 由 (1.3.19), 亦可以定义, 有界线性算子 A 是自共轭的, 如果

$$(Ax,y)=(x,Ay)\,,\quad \forall x,y\in H. \tag{1.5.1}$$

例 1.5.2 令 $H=\mathbb{C}^n$, A 是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的有界线性算子, 由例 1.3.9 知

$$A=(a_{ij}),\quad A^*=(\overline{a}_{ji}).$$

因此, A 是自共轭的充分必要条件是矩阵 (a_{ij}) 和它的共轭转置矩阵 $(\overline{a}_{ji})$ 相等.

例 1.5.3 令 $H=L^2\left(I\right)$, K 是在例 1.3.10 中定义的积分算子, $z=Kx$,

$$z\left(s\right)=\int_I k\left(s,t\right)x\left(t\right)\,\mathrm{d}t,$$

它的共轭算子 K^* 满足

$$(K^*y)(s)=\int_I \overline{k(t,s)}y(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 K 是自共轭的充分必要条件是 $k\left(s,t\right)=\overline{k\left(t,s\right)}$, $t,s\in I$.

例 1.5.4 令 $H=L^2\left(-\infty,\infty\right)$, F 是在例 1.3.12 中定义的乘法算子

$$F\colon\ x\left(t\right)\to f\left(t\right)x\left(t\right).$$

它的共轭算子 F^* 满足

$$F^*\colon\ y\left(t\right)\to\overline{f\left(t\right)}y\left(t\right),$$

当且仅当 $f\left(t\right)$ 是实函数时, F 是自共轭的.

1.5.2 自共轭算子的性质

显然如果 A 是正常的, 即 A 和 A^* 是可以交换的, 则对于数域中的任何数 α, αA 也是正常的. 如果 A 和 B 是自共轭的, 那么 $A+B$ 也是自共轭的, 并且对于任何的实数 α, αA 也是自共轭的, 并且有

定理 1.5.5 Hilbert 空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathfrak{B}(H)$ 中的一个闭集.

证明 考虑 $\mathfrak{B}(H)$ 中的一个由自共轭算子 A_n 组成的点列 $A_n \to A\,(n\to\infty)$, $A\in\mathfrak{B}(H)$. 由于 A_n 是自共轭的, 有

$$\begin{aligned}|(Ax,y)-(x,Ay)| &= |(Ax,y)-(A_nx,y)+(x,A_ny)-(x,Ay)|\\ &\leqslant |((A-A_n)x,y)|+|(x,(A_n-A)y)|\\ &\leqslant 2\,\|A_n-A\|\,\|x\|\,\|y\|\to 0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

即 $(Ax,y)=(x,Ay)$, A 是一个自共轭算子. □

注 全体自共轭算子组成一个实的赋范线性空间, 但是在复的有界线性算子空间 $\mathfrak{B}(H)$ 中, 它不是 $\mathfrak{B}(H)$ 中的一个子空间.

定理 1.5.6 设 A, B 是 Hilbert 空间上的有界自共轭算子, 则 AB 是自共轭的充分必要条件是 $AB=BA$.

定理 1.5.7 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则 A 是自共轭的当且仅当对于 $\forall x\in H, (x,Ax)$ 是实的.

证明 $(\Rightarrow)$ 因为 A 是自共轭的, 所以 $(x,Ax)=(Ax,x)=\overline{(x,Ax)}$.

$(\Leftarrow)$ 如果 $(x,Ax)=\overline{(x,Ax)}=(Ax,x)$, 对于任何的 $x,y\in H$, 由直接计算有

$$\begin{aligned}4(x,Ay) =&(x+y,A(x+y))-(x-y,A(x-y))\\ &+\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y,A(x+\mathrm{i}y))-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y,A(x-\mathrm{i}y))\\ =&(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\\ &+\mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)\\ =&4(Ax,y),\end{aligned}$$

即 $A=A^*$. □

定理 1.5.8 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭算子, 则

$$\|A\|=\sup_{x\in H}\left\{|(Ax,x)|\,\big|\,\|x\|=1\right\}=\sup_{x\in H,y\in H}\left\{|(Ax,y)|\,\big|\,\|x\|=\|y\|=1\right\}.$$

证明 令 $\alpha=\sup\left\{|(Ax,x)|\,\big|\,\|x\|=1\right\}$, 因为

$$|(Ax,x)|\leqslant\|A\|\,\|x\|^2,$$

所以 $\alpha \leqslant \|A\|$.

反之, 对于任何的 $\beta > 0$, 由于 $(Ax, Ax) = \left(A^2x, x\right)$, 通过直接计算和应用平行四边形法则,

$$\begin{aligned}4\|Ax\|^2 &= \left(A\left(\beta x + \beta^{-1}Ax\right), \beta x + \beta^{-1}Ax\right) - \left(A\left(\beta x - \beta^{-1}Ax\right), \beta x - \beta^{-1}Ax\right)\\ &\leqslant \alpha\left\|\beta x + \beta^{-1}Ax\right\|^2 + \alpha\left\|\beta x - \beta^{-1}Ax\right\|^2\\ &= 2\alpha(\beta^2\|x\|^2 + \beta^{-2}\|Ax\|^2).\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

不妨设 $\|Ax\| \neq 0$, 令 $\beta^{-2} = \dfrac{\|x\|}{\|Ax\|}$, 由 (1.5.2) 有

$$\|A\| \leqslant \alpha. \tag{1.5.3}$$

同样令

$$\beta = \sup_{x\in H, y\in H}\left\{|(Ax, y)|\,\big|\,\|x\| = \|y\| = 1\right\},$$

因为 $|(Ax, y)| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$, 所以 $\beta \leqslant \|A\|$, 注意到 $\alpha \leqslant \beta$, 结合 (1.5.3) 有 $\|A\| = \alpha = \beta$. □

定理 1.5.9 Hilbert 空间 H 上的投影算子 P 是正交投影算子当且仅当 P 是自共轭的.

证明 ($\Rightarrow$) 当 P 是正交投影算子, 则对于 $\forall x \in H$, 存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = r + n$ 且 $r \perp n$, $(Px, x) = (r, r + n) = (r, r)$ 是实的, 由定理 1.5.7 知 P 是自共轭的.

($\Leftarrow$) 若 P 是自共轭的投影算子, 对于 $\forall x \in H$, 存在唯一的 $r \in \mathcal{R}(P), n \in \mathcal{N}(P)$, 使得 $x = n + r$. $(r, n) = (Pr, n) = (r, P^*n) = (r, Pn) = (r, 0) = 0$, 即 $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$, P 是一个正交的投影算子. □

例 1.5.10 令 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭线性子空间, P_1, P_2 是在 M 和 $M^\perp$ 上的正交投影算子. 令

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2,$$

其中 λ_1, λ_2 是数值, 则由定理 1.5.9,

$$T^* = \bar{\lambda}_1 P_1^* + \bar{\lambda}_2 P_2^* = \bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2. \tag{1.5.4}$$

于是

$$T^*T = (\bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 = TT^*. \tag{1.5.5}$$

从 (1.5.4) 知 T 是自共轭的当且仅当 λ_1 和 λ_2 都是实的. 从 (1.5.5) 知对于任何的 λ_1, λ_2, T 是正常的.

例 1.5.11 $H = L^2(-\infty, \infty)$, 延迟算子 S_τ: $H \to H, (S_\tau x)(t) = x(t-\tau)$.

显然 S_τ 是一个有界线性算子, 它有有界的逆算子 $S_\tau^{-1} = S_{-\tau}$, 并且 S_τ 是一个酉算子. 事实上,

$$(S_\tau x, S_\tau y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\overline{y(t-\tau)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = (x, y),$$

根据酉算子的定义 (见定义 2.8.4), S_τ 是一个酉算子. 并且对于 $\forall x, y \in L^2(-\infty, \infty)$,

$$(S_\tau x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t+\tau)}\,\mathrm{d}t,$$

因此 $(S_\tau^* y)(t) = y(t+\tau)$, 即 $S_\tau^* = S_{-\tau} = S_\tau^{-1}$.

1.5.3 正常算子的性质

定理 1.5.12 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子 A 是正常的, 当且仅当对于任何的 $x \in H$, 有

$$\|Ax\| = \|A^* x\|. \tag{1.5.6}$$

证明 ($\Rightarrow$) 假设 A 是正常的, 则

$$(AA^* x, x) = (A^* A x, x), \quad \forall x \in H,$$

即

$$(A^* x, A^* x) = (Ax, Ax), \quad \forall x \in H.$$

($\Leftarrow$) 假设对于 $\forall x \in H, \|Ax\| = \|A^* x\|$. 即

$$(Ax, Ax) = (A^* x, A^* x), \quad \forall x \in H.$$

于是

$$((A^* A - AA^*)x, x) = 0, \quad \forall x \in H.$$

$A^* A$ 是自共轭算子, 由定理 1.5.8 知, $A^* A - AA^* = 0$, 即 A 是正常算子. □

如同定理 1.5.5, 有

定理 1.5.13 Hilbert 空间 H 上的全体正常算子组成的集合是 $\mathfrak{B}(H)$ 中的一个闭集.

证明 (1) 先证明若 A 是正常算子, 则 $\|AA^*\| = \|A\|^2$. 由于 AA^* 是一个自共轭的算子, 由定理 1.5.8,

$$\begin{aligned}\|AA^*\| &= \sup_{x \in H}\left\{|(A^* A x, x)| \,\middle|\, \|x\| = 1\right\} = \sup_{x \in H}\left\{|(Ax, Ax)| \,\middle|\, \|x\| = 1\right\} \\ &= \sup_{x \in H}\left\{\|Ax\|^2 \mid \|x\| = 1\right\} = \|A\|^2.\end{aligned}$$

(2) 考虑 $\mathfrak{B}(H)$ 中由正常算子 A_n 组成的点列, $A_n \to A\ (n \to \infty), A \in \mathfrak{B}(H)$. 首先证明 $A_n^* \to A^*(n \to \infty)$. 由于 $\|A_n - A\| \to 0\ (n \to \infty)$, 对于任何的 $x \in H$, 有

$$((A_n - A)x, (A_n - A)x) = ((A_n^* - A^*)(A_n - A)x, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由于 $(A_n^* - A^*)(A_n - A)$ 是自共轭的, 根据定理 1.5.8 有 $\|(A_n^* - A^*)(A_n - A)\| \to 0\ (n \to \infty)$, 再由 (1) 可知 $\|A_n^* - A^*\| \to 0\ (n \to \infty)$.

(3) 以下证明 A 是正常的.

$$\begin{aligned}\|AA^* - A^*A\| &\leqslant \|AA^* - A_nA_n^*\| + \|A_nA_n^* - A_n^*A_n\| + \|A_n^*A_n - A^*A\| \\ &\leqslant \|A - A_n\|\,\|A^* - A_n^*\| + \|A - A_n\|\,\|A_n^*\| + \|A_n\|\,\|A^* - A_n^*\| \\ &\quad + \|A_n^* - A^*\|\,\|A - A_n\| + \|A_n^*\|\,\|A_n - A\| \\ &\quad + \|A_n^* - A^*\|\,\|A_n\| \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

即 $\|AA^* - A^*A\| = 0$. □

注 从定理证明第一部分可以得到, 若 A 是正常算子,

$$\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2. \tag{1.5.7}$$

并且进一步有

定理 1.5.14 如果 A 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子. 那么

$$\left\|A^2\right\| = \|A\|^2. \tag{1.5.8}$$

证明 由于 A 是正常的, 对于 $\forall x \in H$

$$(A^2x, A^2x) = (A^*AAx, Ax) = (AA^*Ax, Ax) = (A^*Ax, A^*Ax),$$

即 $\left\|A^2x\right\| = \|A^*Ax\|$, 于是 $\left\|A^2\right\| = \|A^*A\|$. 由 (1.5.7) 有 $\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$. □

定理 1.5.15 设 H 是一个 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, 则 T 可以分解成

$$T = A + \mathrm{i}B, \tag{1.5.9}$$

其中 A, B 是 Hilbert 空间中的自共轭算子, 并且这种分解是唯一的. 进一步, T 是正常的充分必要条件是 A 和 B 是可以交换的.

证明 令

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*). \tag{1.5.10}$$

显然 $A = A^*, B = B^*$, 即 A, B 是有界的自共轭算子, 且

$$T = A + \mathrm{i}B, \quad T^* = A - \mathrm{i}B. \tag{1.5.11}$$

可以证明这样的分解是唯一的. 事实上, 若 $T = A_1 + \mathrm{i}B_1$, 其中 A_1, B_1 是自共轭的, 于是有

$$A - A_1 = \mathrm{i}(B_1 - B),$$

这样对于 $\forall x \in H$, 有

$$((A - A_1)x, x) = (\mathrm{i}(B_1 - B)x, x).$$

由于 $A - A_1$ 和 $B - B_1$ 是自共轭的, 上式左边是实的, 右边是纯虚数, 于是

$$((A - A_1)x, x) = (\mathrm{i}(B_1 - B)x, x) = 0, \quad \forall x \in H,$$

即 $A - A_1 = B - B_1 = 0$. 根据

$$TT^* = (A + \mathrm{i}B) \cdot (A - \mathrm{i}B) = A^2 + \mathrm{i}BA - \mathrm{i}AB + B^2,$$

$$T^*T = (A - \mathrm{i}B) \cdot (A + \mathrm{i}B) = A^2 - \mathrm{i}BA + \mathrm{i}AB + B^2,$$

可推出 T 是正常的充要条件是 $BA = AB$. □

注 (1.5.9) 给出的分解 $T = A + \mathrm{i}B$, 其中 A, B 是 Hilbert 空间中的自共轭算子, 称为 T 的笛卡儿分解.

定理 1.5.16 设 H 是一个 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, T 是一个正常的线性算子, 它的笛卡儿分解为 $T = A + \mathrm{i}B$, 则

$$\max\left\{\|A\|^2, \|B\|^2\right\} \leqslant \|T\|^2 \leqslant \|A\|^2 + \|B\|^2.$$

证明 由于 T 是正常的, $AB = BA$, 于是

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = \left((A^2 + B^2)x, x\right) \\ &= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \leqslant (\|A\|^2 + \|B\|^2)\|x\|^2.\end{aligned}$$

由此定理可证. □

1.5.4 非负的和正的算子

对于有界自共轭算子 T, 根据定理 1.5.7, (Tx, x) 是实的, 可以在有界自共轭线性算子中引进一种顺序关系.

定义 1.5.17 T_1 和 T_2 是 H 上的有界自共轭算子, 称 $T_1 \leqslant T_2$, 如果对于任意的 $x \in H$, 有

$$(T_1x, x) \leqslant (T_2x, x).$$

一个有界线性算子称为是非负的 (正的), 如果对于 $\forall x \in H$, $(Tx, x) \geqslant 0 (> 0)$.

显然, $T_1 \leqslant T_2$ 等价于 $T_2 - T_1 \geqslant 0$, 并且 T_1, T_2 是非负的, 则 $T_1 + T_2$ 也是非负的.

引理 1.5.18 如果 T, S 是 Hilbert 空间上两个非负的自共轭算子, 并且可以交换, 则它们的乘积也是非负的.

证明 不妨假定 $S \neq 0$ 考虑

$$S_1 = \frac{S}{\|S\|}, S_2 = S_1 - S_1^2, \cdots, S_{n+1} = S_n - S_n^2, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

显然, $0 \leqslant S_1 \leqslant I$, 运用数学归纳法可以证明 $0 \leqslant S_n \leqslant I$. 事实上, 若 $0 \leqslant S_k \leqslant I$, 则对于 $\forall x \in H$, 令 $y = S_k x$, 有

$$(S_k^2(I - S_k)x, x) = (S_k(I - S_k)x, S_k x) = ((I - S_k)y, y) \geqslant 0.$$

可知 $S_k^2(I - S_k)$ 是非负的, 同样可以证明 $S_k(I - S_k)^2$ 是非负的, 并且

$$S_{k+1} = S_k - S_k^2 = S_k^2(I - S_k) + S_k(I - S_k)^2 \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant I - S_k + S_k^2 = I - S_{k+1},$$

即 $0 \leqslant S_{k+1} \leqslant I$. 注意到

$$S_1 = S_1^2 + S_2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3 = \cdots = S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 + S_{n+1},$$

结合 $S_{n+1} \geqslant 0$, 有

$$S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 \leqslant S_1.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} \|S_j x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (S_j x, S_j x) = \sum_{j=1}^{n} (S_j^2 x, x) \leqslant (S_1 x, x).$$

可知 $S_n x \to 0\ (n \to \infty)$, 于是

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S_j^2\right) x = (S_1 - S_{n+1})x \to S_1 x.$$

注意到 T 和 S_j^2 是可交换的, 于是

$$(STx, x) = \|S\|\,(TS_1 x, x) = \|S\| \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (TS_j^2 x, x) = \|S\| \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (Ty_j, y_j) \geqslant 0,$$

其中 $y_j = S_j x$, 即 ST 是非负的. □

定义 1.5.19　$\{T_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭线性算子列, 如果满足

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots \leqslant T_n \leqslant \cdots, \tag{1.5.12}$$

则称 $\{T_n\}$ 是单调增加的.

定理 1.5.20　$\{T_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭线性算子列, 且

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant \cdots \leqslant T_n \leqslant \cdots \leqslant K, \tag{1.5.13}$$

其中 K 是 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭线性算子, 且对于 $\forall j, T_j$ 与 K, T_j 与 $T_m(m=1,2,\cdots)$ 均可交换, 那么存在一个有界自共轭线性算子 T, 使得 $T \leqslant K$, 且 $T_n \xrightarrow{s} T$, 即 $\forall x \in H$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$.

证明　不妨假定 $T_1 \geqslant 0$, 对于 $m > n$, 由 T_m, T_n 的可交换性,

$$T_m^2 - T_nT_m = T_m^2 - T_mT_n = T_m(T_m - T_n)$$

再由引理 1.5.18 可知 $T_m^2 - T_nT_m \geqslant 0$, 即

$$T_m^2 \geqslant T_nT_m.$$

同理可证

$$T_nT_m \geqslant T_n^2.$$

于是

$$(K^2x,x) \geqslant (T_m^2x,x) \geqslant (T_nT_mx,x) \geqslant (T_n^2x,x),$$

即对于 $\forall x \in H$, $\{(T_m^2x,x)\}$ 是单增有界的数列, 收敛. 由于

$$\|(K-T_m)x-(K-T_n)x\|^2 = \|(T_m-T_n)x\|^2 = (T_m^2x,x) - 2(T_mT_nx,x) + (T_n^2x,x),$$

注意到

$$(T_mT_nx,x) \geqslant (T_n^2x,x),$$

有

$$\|(K-T_m)x-(K-T_n)x\|^2 \leqslant (T_m^2x,x) - (T_n^2x,x).$$

由于 $\{(T_m^2x,x)\}$ 是 Cauchy 列, 所以 $\{(K-T_n)x\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 即存在 S, 使得对于 $\forall x \in H$,

$$\lim_{n\to\infty}(K-T_n)x = Sx,$$

即 T_n 强收敛到 $K-S$. 令 $T = K-S$, 由 T_n 是自共轭的和内积的连续性, 可知 T 是自共轭的. 由于对 $\forall x \in H$, $\{T_nx\}$ 是收敛的, 根据一致有界原则 (定理 1.2.22), T 是有界的, 且 $T \leqslant K$. □

1.5.5 自共轭线性算子的平方根

定义 1.5.21 设 T 是 Hilbert 空间 H 上非负的有界自共轭线性算子, 有界线性算子 S 称为是 T 的平方根, 如果 $S^2=T$. 如果 S 是非负的 (正的) 则称 S 是 T 非负的 (正的) 平方根, 记为

$$S=T^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5.14}$$

定理 1.5.22 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的非负的 (正的) 有界自共轭线性算子, 那么存在唯一的 T 的非负的 (正的) 平方根 $T^{\frac{1}{2}}$, 且 $T^{\frac{1}{2}}$ 和每一个与 T 可交换的有界线性算子可以交换.

证明 若 $T=0$, 则 $T^{\frac{1}{2}}=0$, 设 $T\neq 0$, 首先考虑 $T\leqslant I$ 的情况. 令算子列

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{2}(T-S_n^2),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

其中 $S_0=0$, 显然 S_n 是 T 的多项式, 因此 S_n 是自共轭, 相互可以交换, 与 T 可以交换, 由于 $S_1=\dfrac{1}{2}T\leqslant T$, 并且

$$I-S_n=I-S_{n-1}-\frac{1}{2}(T-S_{n-1}^2)=\frac{1}{2}(I-S_{n-1})^2+\frac{1}{2}(I-T).$$

由数学归纳法可知 $S_n\leqslant I(n=1,2,\cdots)$, 根据

$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n&=S_n+\frac{1}{2}(T-S_n^2)-S_{n-1}-\frac{1}{2}(T-S_{n-1}^2)\\&=(S_n-S_{n-1})\left[I-\frac{1}{2}(S_n+S_{n-1})\right]\end{aligned}$$

和 $0=S_0\leqslant S_1=\dfrac{1}{2}T$, 由数学归纳法得到 $\{S_n\}$ 是单增的算子列, 由定理 1.5.20 知存在有界的自共轭算子 S, S_n 强收敛到 S, 即对于 $\forall x\in H$,

$$\lim_{n\to\infty}S_nx=Sx.$$

注意到 $0\leqslant S_1\leqslant S_n$ 以及

$$S_{n+1}x-S_nx=\frac{1}{2}(Tx-S_n^2x),$$

令 $n\to\infty$, 有

$$Tx=S^2x,\quad \forall x\in H,$$

即 $T^{\frac{1}{2}}=S$, 且 S 是非负的自共轭算子.

至于交换性, 如果 M 与 T 可交换, S_n 是 T 的多项式, M 与 S_n 可交换, S 是 S_n 的强极限, 推知 M 与 S 可交换.

假如 T 的正平方根不唯一, 存在 S 和 M 都是 T 的非负平方根, 即

$$T = S^2 = M^2.$$

于是 $MT = MM^2 = M^2M = TM$, 同样可知 $ST = TS$, 对于 $\forall x \in H$, 令 $y = (S-M)x$, 于是 $(Sy, y) \geqslant 0$, $(My, y) \geqslant 0$ 且

$$(Sy, y) + (My, y) = ((S+M)y, y) = ((S^2 - M^2)x, y) = ((T-T)x, y) = 0,$$

即 $(Sy, y) = (My, y) = 0$. 由于 S 是非负的自共轭算子, 于是存在一个非负的自共轭的平方根 C, 使得 $C^2 = S$. 我们有

$$\|Cy\|^2 = (Cy, Cy) = (C^2y, y) = (Sy, y) = 0.$$

注意到 $Sy = C^2y = C(Cy) = 0$ (同理 $My = 0$), 因此

$$(S-M)y = 0.$$

于是

$$\|Sx - Mx\|^2 = ((S-M)^2x, x) = ((S-M)y, x) = 0,$$

即 $Sx = Mx, \forall x \in H$. 这样 $S = M$ 得证. □

还可以定义 T 的 "绝对值" $|T|$. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭线性算子, T^2 的正平方根记为 $|T|$, 即

$$|T| = (T^2)^{1/2}. \tag{1.5.15}$$

进一步地, T 的正部

$$T^+ = \frac{1}{2}(|T| + T), \tag{1.5.16}$$

T 的负部

$$T^- = \frac{1}{2}(|T| - T). \tag{1.5.17}$$

于是

$$T = T^+ - T^-, \quad |T| = T^+ + T^-. \tag{1.5.18}$$

注 1 容易证明 $|T|, T^+, T^-$ 是自共轭的线性算子, 且 $T^+ \geqslant 0, T^- \geqslant 0$.

注 2 如果 S 和 T 可交换, 则 $|T|, T^+, T^-$ 都可以和 S 交换.

注 3

$$T^+T^- - T^-T^+ = 0. \tag{1.5.19}$$

我们对于 T^+ 的零空间 $\mathcal{N}(T^+)$ 上的正交投影算子 E,

$$E\colon H \to \mathcal{N}(T^+) \tag{1.5.20}$$

给予特别的关注.

定理 1.5.23 H, T^+, T^-, E 如上定义, 则 E 与所有与 T 可交换的有界自共轭线性算子可以交换, 并且

$$T^+E = ET^+ = 0, \tag{1.5.21}$$

$$T^-E = ET^- = T^-, \tag{1.5.22}$$

$$TE = -T^-, \quad T(I-E) = T^+. \tag{1.5.23}$$

证明 如果 $TS = ST$, 对于 $\forall x \in H$, 记 $y = Ex \in \mathcal{N}(T^+)$, 于是 $T^+y = 0$, $ST^+y = S0 = 0$. 由以上注 2 知 $ST^+ = T^+S$,

$$T^+SEx = T^+Sy = ST^+y = 0,$$

即 $SEx \in \mathcal{N}(T^+)$, 由于 E 是 $\mathcal{N}(T^+)$ 上的投影算子, $ESEx = SEx$ $(\forall x \in H)$, 即 $ESE = SE$, 由于 E 是自共轭的, $ES = E^*S^* = (SE)^* = (ESE)^* = ESE = SE$.

由于 $\forall x \in H$, $Ex \in \mathcal{N}(T^+)$, $T^+Ex = 0$. T^+ 是自共轭的, 于是 $ET^+x = T^+Ex = 0$, 即 $ET^+ = T^+E = 0$. 再由 $T^+T^-x = 0$, $T^-x \in \mathcal{N}(T^+)$, 因此 $ET^-x = T^-x$, 结合 T^- 是自共轭的, 对 $\forall x \in H$, $T^-Ex = ET^-x = T^-x$, 即 $T^-E = ET^- = T^-$. 另外 $TE = (T^+ - T^-)E = -T^-$, $T(I-E) = T - TE = T + T^- = T^+$. □

习 题 1.5

1. 证明若 T 是正常的, 则对于所有复数 λ, $\lambda I - T$ 是正常的.

2. 在 Hilbert 空间 $H = L^2(I)$ 上定义乘法算子 F: $H \to H$,

$$Fx(t) = f(t)x(t),$$

其中 I 是一个区间, f 是 I 上的有界的复值函数. 证明 F 是定义在 H 上的正常的有界线性算子.

3. 设 T 为 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, $\{e_n\}$ 为 H 中完备的正规正交系, 若对任何 m, n, 有 $(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)}$, 则 T 是自共轭的.

4. 设 T 是复的内积空间 H 上的有界线性算子, 证明如果对 $\forall x \in H, (Tx, x) = 0$, 则 $T = 0$. 对于实空间, 此结果成立否? 当 T 是自共轭的, 则不论 H 是实的还是复的, 只要 $(Tx, x) = 0$ $(x \in H)$, 就有 $T = 0$.

5. T 为定义在完备内积空间 H 上的有界自共轭线性算子, 如果存在 $\alpha_0 > 0$, 使 $(Tx, x) \geqslant \alpha_0(x, x)$, 则称 T 为正定的. 证明凡正定算子必有有界逆算子 T^{-1}, 且 $\|T^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha_0}$.

6. 设 $y = Kx$ 是 $L^2[a, b]$ 上正的自共轭算子, 其中 $y(t) = \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 这里$k(t, \tau)$ 是实值连续函数. 证明

(1) $k(t, t) \geqslant 0, \forall a \leqslant t \leqslant b$;

(2) 逆命题不成立, 即可构造核 $k(t,\tau)$ 使其满足 $k(t,t) \geqslant 0, \forall a \leqslant t \leqslant b$, 但相应的算子 K 是自共轭的, 而不是正的.

7. 设 L 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子. 证明下列关系式:

$$\mathcal{N}(L^*) = \mathcal{N}(LL^*), \quad \overline{\mathcal{R}(L)} = \overline{\mathcal{R}(LL^*)}.$$

8. 设 A 是 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 G 的有界线性算子. 证明

(1) A^*A, AA^* 分别是 H, G 上的自共轭算子, 而且 $A^*A \geqslant 0, AA^* \geqslant 0$;

(2) 存在 $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$ 到 $\overline{\mathcal{R}(A)}$ 上的酉算子 U, 使得 $A = U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$.

9. 设 $L_n \xrightarrow{S} L, L_n$ 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子. 证明

(1) 若对所有的 n, L_n 是自共轭的, 则 L 是自共轭的;

(2) 若对所有的 n, L_n 是正常的, 则 L 是正常的.

10. A 为 Hilbert 空间 H 内的正算子, 则对任何 $x, y \in H$, 有

$$|(Ax,y)|^2 \leqslant (Ax,x)(Ay,y).$$

11. 计算 $\|A\|$.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$;　　(2) $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$.

12. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, 定义 U :

$$U = \frac{A - \mathrm{i}I}{A + \mathrm{i}I},$$

假定 $A + \mathrm{i}I$ 是可逆的. 证明

(1) U 是酉算子;　　(2) $A = \mathrm{i}\dfrac{I+U}{I-U}$.

13. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, 并设 $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\mathrm{i}A)^n}{n!}$. 证明

(1) U 是酉算子;

(2) $U^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nA}$ (对任何整数 n).

14. 证明如果 $T\colon H \to H$ 是有界自共轭算子, 则 T^n 也是有界自共轭算子, 这里 n 是一个正整数.

在以下练习中, 均假定算子定义在 Hilbert 空间 H 上.

15. 如果 S 与 T 都是正常线性算子且满足 $ST^* = T^*S$ 与 $TS^* = S^*T$, 证明它们的和 $S+T$ 与积 ST 都是正常的.

16. 证明有界线性算子 T 是正算子的充要条件是存在有界线性算子 S 使 $T = S^*S$.

17. 设 T 是自共轭算子且有有界逆算子, 证明 T^{-1} 也是自共轭的.

18. 设 T_1, T_2 自共轭且存在 $C > 0$, 使若 $CI \leqslant T_1 \leqslant T_2$, 则 T_1, T_2 均有有界逆算子且 $C^{-1}I \geqslant T_1^{-1} \geqslant T_2^{-1}$.

19. 设自共轭算子 T_1, T_2 满足 $0 \leqslant T_1 \leqslant T_2$ 且 T_1, T_2 可交换, 则 $T_1^n \leqslant T_2^n$ 对任何自然数 n 成立.

20. 设 S 和 T 是复 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭线性算子.

(1) 若 $S \leqslant T$ 且 $S \geqslant T$, 证明 $S = T$;

(2) 若 $S \geqslant 0$, 证明 $TST \geqslant 0$.

21. 设 $A \in \mathfrak{B}(H), T$ 是正算子 A^*A 的正的平方根, 则对一切 $x \in H$, 有 $\|Tx\| = \|Ax\|$.

22. 设 $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, 试求 $T^+, T^-, (T^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 T^2 的其他平方根.

23. 证明若有界自共轭线性算子 $A\colon H \to H$ 是正的, 则 $A = A^+, A^- = 0$.

24. 设 $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ 由 $(Tx)(t) = tx(t)$ 定义, 证明 T 是自共轭的和正的, 并找出其正平方根.

25. 设 $T\colon l^2 \to l^2$ 由 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \to (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$ 定义, 试问 T 有界吗? 是自共轭的吗? 是正的吗? 并求 T 的一个平方根.

26. 设 $A\colon H \to H$ 是复 Hilbert 空间上的一有界正自共轭线性算子, 利用 A 的正平方根, 证明

(1) 对一切 $x, y \in H$ 有 $|(Ax, y)| \leqslant (Ax, x)^{\frac{1}{2}}(Ay, y)^{\frac{1}{2}}$;

(2) 对一切 $x \in H$ 有 $\|Ax\| \leqslant \|A\|^{\frac{1}{2}}(Ax, x)^{\frac{1}{2}}$, 故 $(Ax, x) = 0$ 当且仅当 $Ax = 0$.

27. 考虑由矩阵

$$S = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 上诱导的算子 (赋予通常内积), 则 $S \leqslant T$, 但 $S^2 \leqslant T^2$ 不成立.

§1.6 紧 算 子

紧的线性算子是一类十分重要的线性算子, 紧算子的值域是有限维的或者在某种意义下性质相近于有限维, 因此它的结构, 特别是谱分解的结构与有限维空间有界线性算子的谱分解结构十分相似, 这使得紧算子有着十分广泛的应用背景.

1.6.1 紧的线性算子的定义和例

定义 1.6.1 设 A 是赋范空间 X 的子集, 如果 A 的任何无穷子集必包含一个收敛点列, 则称 A 是列紧集, 若这个子列收敛到 A 中的点, 则称 A 是自列紧的.

定义 1.6.2 在拓扑空间 X 中, 集合 A 称为是紧的, 如果 X 中每个覆盖 A 的开集族中存在有穷个开集可以覆盖 A.

可以证明, 若 A 是赋范空间 X 中的子集, 则 A 是紧集, 当且仅当 A 是自列紧的.

定义 1.6.3 X, Y 是 Banach 空间, $T: X \to Y$ 是一个线性算子, 如果对于 X 中的任何有界子集 A, T 关于 A 的值域的闭包 $\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称 T 是一个紧的线性算子, 或者全连续算子.

注 1 T 是紧的, 当且仅当对于任何的有界点列 $\{x_n\} \subset X$, 点列 $\{Tx_n\}$ 一定包含一个收敛的子列.

注 2 T 是紧的, 则 T 一定是有界的, 否则将存在一个点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 且 $\|Tx_n\| \to \infty$, 根据紧算子定义, 这是不可能的.

定理 1.6.4 设 $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是紧的线性算子.

证明 $B \subset X$ 是一个有界子集, 由于 T 是有界线性算子, $\overline{T(B)}$ 是有界闭集, 而 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 因此 $\overline{T(B)}$ 是紧的. □

注 显然只要 X, Y 中有一个是有限维的, 则 X 到 Y 的有界线性算子是紧的. 如果 T 的值域是有限维的, T 称为是有穷秩算子.

例 1.6.5 设 $X = Y = l^2$, I 是从 l^2 到 l^2 的恒等算子, I 是连续线性算子, 但是 I 不是紧的. 因为 $\{e_n\}$ 是有界的, 但其中没有收敛的子列, 其中 $e_n = (0, 0, \cdots, \underset{n}{1}, \cdots)$.

从紧算子、紧集、完全有界集的定义有

定理 1.6.6 设 X、Y 是 Banach 空间, T 是从 X 到 Y 的线性算子, 则下列叙述是等价的:

(1) T 是紧的线性算子;

(2) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个紧子集中;

(3) $A \subset X$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 Y 的一个自列紧的子集之中;

(4) 对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 Y 中收敛的子列;

(5) 对于 X 中的任何有界集 A, $T(A)$ 是 Y 中的完全有界集.

例 1.6.7 在 $C[a,b]$ 中考虑积分算子 K:

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)\, x(s) \mathrm{d}s, \tag{1.6.1}$$

其中 $k(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$, 那么 K 是紧算子.

事实上, 令 $M = \max\{|k(t,s)| \,\big|\, (t,s) \in [a,b] \times [a,b]\}$, 对于所有的 $x \in C[a,b]$, $\|Kx\| \leqslant M(b-a)\|x\|$. 于是如果 $B \subset C[a,b]$ 是一个有界集, 那么 $K(B)$

是有界集. 同时, 对于 $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ 和 $\forall x \in C[a,b]$ 有

$$|(Kx)(t_1)-(Kx)(t_2)|^2 = \left|\int_a^b [k(t_1,s)-k(t_2,s)]x(s)\,\mathrm{d}s\right|^2$$
$$\leqslant \int_a^b |k(t_1,s)-k(t_2,s)|^2\,\mathrm{d}s \cdot \int_a^b |x(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

注意到 $k(t,s)$ 是连续的, 因此 $\{Kx|x\in C[a,b], x\in B\}$ 是等度连续的, 且一致有界, 由 Arzela-Ascoli 定理, $K(B)$ 是 $C[a,b]$ 中的列紧集. 于是 K 是一个紧算子.

例 1.6.8 设 $H=l^2$, 令 K 为从 H 到 H 的线性变换, 定义为 $y=Kx$,

$$y_n = \alpha_n x_n, \quad n=1,2,3,\cdots, \tag{1.6.2}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)$, α_n 是数值, 则 K 是一个紧算子当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0. \tag{1.6.3}$$

证明 假如 K 是紧的, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\neq 0$, 那么存在一个 $\varepsilon>0$ 和 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列 $\{\alpha_{n_k}\}$, 使得对于任何的 k, 有 $|\alpha_{n_k}|\geqslant\varepsilon$, 令

$$e_k = (\delta_{1n_k}, \delta_{2n_k}, \cdots),$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, 那么

$$Ke_k = (\alpha_1\delta_{1n_k}, \alpha_2\delta_{2n_k}, \cdots) = (0,0,\cdots,\alpha_{n_k},\cdots), \quad k=1,2,\cdots,$$

于是对于 $m\neq k$,

$$\|Ke_m - Ke_k\|^2 = |\alpha_{n_m}|^2 + |\alpha_{n_k}|^2 \geqslant 2\varepsilon^2,$$

这与 $\{Ke_k\}$ 是紧集矛盾.

另一方面, 假如 (1.6.3) 成立, 对于 $D=\{x|\,\|x\|\leqslant 1\}$, 证明 $A=\overline{K(D)}$ 是紧的. 因为 $\{\alpha_n\}$ 收敛到零, 于是 $\|Kx\|\leqslant\max\{|\alpha_n|\}\|x\|$, 即 A 是有界的. 且对于 $\forall\, y\in A$,

$$\sum_{n=N}^{\infty}|y_n|^2 = \sum_{n=N}^{\infty}|\alpha_n x_n|^2 \leqslant \max_{N\leqslant n}|\alpha_n|^2\sum_{n=N}^{\infty}|x_n|^2 \leqslant \max_{N\leqslant n}|\alpha_n|^2 \to 0, \quad N\to\infty. \tag{1.6.4}$$

因此, $\sum\limits_{n=N}^{\infty}|y_n|^2$ 一致收敛到零, 所以 A 是 l^2 中的紧集, 即 K 是一个紧算子. □

用相似的方法, 可以证明:

例 1.6.9 令 $\{\phi_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 Hilbert 空间 $H = L^2[a,b]$ 中的两组正交集, 线性算子 K:

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n\phi_n(t)\int_a^b x(\tau)\overline{\varphi_n(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\} \\ &= \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(t)\overline{\varphi_n(\tau)}\right)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

其中 $k(t,\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(t)\overline{\varphi_n(\tau)}$, 则 K 是紧的当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

例 1.6.10 考虑 $L^2[a,b]$ 上的乘法算子

$$F\colon\ x(t) \to f(t)x(t),$$

其中 $f(t)$ 是一个有界可测函数. 显然 F 是一个有界线性算子, $\|F\| \leqslant \|f\|_\infty$, 可以证明 F 是紧的线性算子当且仅当 $f(t)$ 几乎处处等于零.

1.6.2 紧线性算子的性质

定义 1.6.11 设 X, Y 是 Banach 空间, 从 X 到 Y 的全体紧算子记为 $\mathcal{K}(X,Y)$, 特别地当 $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{K}(X)$.

定理 1.6.12 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{K}(X,Y)$ 是 $\mathfrak{B}(X,Y)$ 的一个闭的线性子空间.

证明 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X,Y)$, 由定义显然有 $\alpha_1T_1 + \alpha_2T_2 \in \mathcal{K}(X,Y)$, 即 $\mathcal{K}(X,Y)$ 是有界线性算子空间的一个线性子空间. 若 $T_n \in \mathcal{K}(X,Y)$ 且 $\|T_n - T\| \to 0(n \to \infty)$, 于是对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0$, 使得

$$\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6.5}$$

设 $B \subset X$ 是一个有界集, 因为 T_{n_0} 紧, 所以 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 是 Y 中的紧子集, 对 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 取 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网, 记为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, 有 $\overline{T_{n_0}(B)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} S\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 其中 $S\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{y \in Y \mid d(y, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. 由于 $\{y_1, \cdots, y_m\}$ 是 $\overline{T_{n_0}(B)}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网, 结合 (1.6.5), 则

$$\overline{T(B)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(y_i, \varepsilon),$$

即 $\overline{T(B)}$ 紧, T 是一个紧算子. □

例 1.6.13 设 $k(t,s)\in L^2(I)$, 其中 $I=\{(t,s)|a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b\}$, 则积分算子

$$(Kx)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s,\quad x\in L^2[a,b] \tag{1.6.6}$$

是从 $L^2[a,b]$ 到自身的紧算子.

证明 由于

$$\phi_n(t)=(b-a)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(2n\pi\frac{t-a}{b-a}\mathrm{i}\right),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

是 $L^2[a,b]$ 的一组正交基,

$$\phi_{n,m}(t,s)=\phi_n(t)\overline{\phi_m(s)}$$

形成了 $L^2(I)$ 的一组正交基, 于是我们有

$$\|K_N-K\|\to 0,\quad N\to\infty,$$

其中

$$K_N=\sum_{|n|,|m|\leqslant N}(k,\phi_{n,m})\phi_{n,m}.$$

由于 $\mathcal{R}(K_N)$ 是 $2N+1$ 维的, 根据定理 1.6.4 和定理 1.6.12 得知 K 是紧的.

注 算子 K 称为 Hilbert-Schmidt 算子, 这是一类重要的紧算子.

定义 1.6.14 设 $\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的完备的正交基. 一个有界线性算子 T 称为是 Hilbert-Schmidt 算子, 如果

$$|T|=\left\{\sum_{\alpha\in A}\|Tx_\alpha\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

是有限的. $|T|$ 称为算子的 Hilbert-Schmidt 范数.

可以证明, T 是 Hilbert-Schmidt 算子, 则

(1) $|T|$ 的值与 Hilbert 空间中正交基的选择无关;

(2) $\|T\|\leqslant|T|$, $|T|=|T^*|$;

(3) 全体 Hilbert-Schmidt 算子在 Hilbert- Schmidt 范数下是一个 Banach 空间;

(4) 若 T 和 S 都是 Hilbert-Schmidt 算子, 则 $|TS|\leqslant|T||S|$, 即全体 Hilbert-Schmidt 算子在 Hilbert-Schmidt 范数下组成一个 Banach 代数;

(5) Hilbert-Schmidt 算子是紧的, 且是一列有穷秩算子在 Hilbert-Schmidt 范数下收敛的极限.

1.6.3 弱列紧

为了从有界性导出某种意义下的列紧性, 引入弱列紧的概念.

定义 1.6.15 设 X 是赋范空间, $A \subset X$. 如果 A 中的任意点列, 有一个弱收敛 (定义 1.2.15) 的子列, 则称集合 A 是弱列紧的. 如果收敛的极限属于 A, 则称集合 A 是弱自列紧的.

定理 1.6.16 设 H 是 Hilbert 空间, 则对于 H 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, 都存在它的一个子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $\{x_{n_k}\}$ 在 H 中弱收敛, 即 H 中的有界集是弱列紧的.

证明 令 $M = \operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 那么 $M \oplus M^\perp$ 在 H 中稠. 对于每个 $j \in \mathbb{N}$, 数列 $\{(x_n, x_j)\}_{n=1}^\infty$ 是有界的, 因此对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 能够找到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_{j_k}}\}_{k=1}^\infty$, 使得 $\{x_{n_{(j+1)_k}}\}_{k=1}^\infty$ 是 $\{x_{n_{j_k}}\}_{k=1}^\infty$ 的子列且 $\{(x_{n_{j_k}}, x_j)\}_{k=1}^\infty$ 是收敛的. 使用对角线方法, 令 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty = \{x_{n_{k_k}}\}_{k=1}^\infty$, 于是对于每个 $j \in \mathbb{N}$ 数列 $\{(x_{n_k}, x_j)\}_{k=1}^\infty$ 是收敛的. 注意到对于每个 $x \in M^\perp$, $(x_{n_k}, x) = 0$. 因此对于任意的 $x \in M \oplus M^\perp$, $\{(x_{n_k}, x)\}_{k=1}^\infty$ 是收敛的. 结合 $M \oplus M^\perp$ 在 H 中稠, 定理可证. □

一般地, 有

定理 1.6.17 (Eberlein-Шмулян) 自反空间的单位 (闭) 球是弱 (自) 列紧的.

例 1.6.18 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交集, 根据 Bessel 不等式, 对于任意的 $x \in H$, 有 $\|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2$, 即 $(x, x_n) \to 0 (n \to \infty)$, 由 Riesz 表示定理 1.3.3 和弱收敛的定义, 有 $x_n \xrightarrow{w} 0$.

特别地, 可分的 Hilbert 空间的正交基弱收敛到零.

注 例 1.6.18 说明弱收敛推不出按范数收敛, 可分的 Hilbert 空间的正交基不是列紧的, 但是弱列紧的.

对于紧的线性算子, 有以下性质

定理 1.6.19 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, T 是紧的充要条件是: 如果 $\{x_n\}$ 弱收敛到零 ($x_n \xrightarrow{w} 0$), 则 $\{Tx_n\}$ 按范数收敛到零, 即 $Tx_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

证明 设 T 是紧的, 如果 $\{Tx_n\}$ 不收敛到零, 则存在 $\varepsilon > 0$, 及 x_n 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$\|Tx_{n_k}\| > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.6.7}$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛, $\{x_{n_k}\}$ 是一个有界集, 所以 $\{Tx_{n_k}\}$ 有一个收敛的子列, 不妨设

$$\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y_0.$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛到零, 所以对于 $\forall y \in H$,

$$(Tx_{n_k}, y) = (x_{n_k}, T^*y) \to 0, \quad k \to \infty,$$

即 $\{Tx_{n_k}\}$ 弱收敛到零. 于是

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_{n_k} = w - \lim_{n\to\infty} Tx_{n_k} = 0, \tag{1.6.8}$$

与 (1.6.7) 矛盾.

反之, 如果 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = 0$ 成立. 考虑 H 中的一个有界点列 $\{x_n\}$, 由定理 1.6.16 存在一个弱收敛的点到 $\{x_{n_k}\}$, 即 $w\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. 由条件 $\lim\limits_{k\to\infty} T(x_{n_k} - x_0) = 0$, 知 $\{Tx_{n_k}\}$ 是收敛的, T 是紧算子. □

对于一般的 Banach 空间, 有

定理 1.6.20 设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, 则 T 把弱紧集映成列紧集; 反之, 如果 X 是自反的, T 把任何弱紧集都映成列紧集, 则 T 是紧算子.

定理 1.6.21 设 H 是 Hilbert 空间, $T_1 \in \mathfrak{B}(H)$, $T_2 \in \mathfrak{B}(H)$.

(1) T_1 和 T_2 中有一个是紧的, 那么 T_1T_2 是紧的;

(2) $T \in \mathfrak{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^*T 是紧的;

(3) $T \in \mathfrak{B}(H)$, T 是紧的当且仅当 T^* 是紧的.

证明 (1) 只需注意有界线性算子把有界集变为有界集, 把收敛的序列变为收敛的序列.

(2) 如果 T 是紧的, 由 (1) 有 T^*T 紧的. 反之, 如果 T^*T 是紧的, 设 $x_n \xrightarrow{w} 0$, 则由定理 1.6.19 有 $T^*Tx_n \to 0\,(n\to\infty)$, 注意 $\{x_n\}$ 有界, 有

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \to 0, \tag{1.6.9}$$

即 T 是紧的.

(3) T 是紧的, $(T^*)^*T^* = TT^*$ 是紧的, 由 (2) 知 T^* 是紧的. □

注 以后可以看到, 定理 1.6.4、定理 1.6.12 和定理 1.6.21 意味着全体紧算子是 Banach 代数 $\mathfrak{B}(H)$ 中的一个非零的闭的双边理想.

1.6.4 紧算子的有穷秩逼近

定理 1.6.22 线性算子 $T \in \mathfrak{B}(H)$ 是紧的, 当且仅当存在 $\mathfrak{B}(H)$ 中的一列有穷秩算子 $\{T_n\}$, 使得 $\|T - T_n\| \to 0\,(n\to\infty)$. 并且对于紧线性算子, 子空间 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可分的.

证明 如果 T_n 是有穷秩的, 由定理 1.6.4 和定理 1.6.12, 及 $\|T - T_n\| \to 0(n \to \infty)$, 可知 T 是紧算子.

反之, 如果 T 是紧的, 首先证明 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的. 令 $\{e_\alpha, \alpha \in A\}$ (A 是一个指标集) 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的一个正交基, 因为 T 是紧的, 根据例 1.6.18 和定理 1.6.19, 对

于 A 中的每一个序列 $\{\alpha_n\}\,(\alpha_n \neq \alpha_m, n \neq m)\,, Te_{\alpha_n} \to 0(n \to \infty)$, 因此对于每一个 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个 $\alpha \in A$, 使得 $\|Te_\alpha\| \geqslant \varepsilon$, 由此可知 A 是至多可数的, 即 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的.

不妨设 $\{e_n : n \in N\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交基, P_m 是在 $L_m = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 上的正交投影, P 是在 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 的正交投影, 于是 $\{P_m\}$ 强收敛到 P. 令 $T_m = TP_m$, 则

$$T_m x = \sum_{n=1}^{m} (x, e_n) Te_n. \tag{1.6.10}$$

由于 T_m 的值域至多是 m 维的, 所以 T_m 是紧算子. 由范数的定义对于每一个 m, 存在一个 $x_m \in H, \|x_m\| = 1$, 使得

$$\|(T - T_m)x_m\| \geqslant \frac{1}{2}\|T - T_m\|. \tag{1.6.11}$$

对于 $\forall g \in H$, 由于 $\{P_m\}$ 强收敛到 P,

$$((P - P_m)x_m, g) = (x_m, (P - P_m)g) \to 0(m \to \infty),$$

即 $(P - P_m)\,x_m \xrightarrow{w} 0$. 根据定理 1.6.19 $(T - T_m)x_m = T(P - P_m)x_m \to 0$, 结合 (1.6.11),

$$\|T - T_m\| < 2\|(T - T_m)x_m\| \to 0, \tag{1.6.12}$$

即 $T_m \to T$.

由于 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 是可分的, 设 $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{N}(T)^\perp$ 中的可数稠子集, 从 T 的有界性我们有 $\{Ty_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中稠, 因此 $\mathcal{R}(T)$ 是可分的. □

定理 1.6.23　令 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. 那么对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathcal{R}(T)$ 的一个有限维的子空间 M, 使得对于 $\forall x \in X$,

$$\inf\{\|Tx - m\| \,|m \in M\} \leqslant \varepsilon\|x\|. \tag{1.6.13}$$

证明　任给 $\varepsilon > 0$, D 是 X 中的闭的单位球, $T(D)$ 是紧的, 因此存在 $\mathcal{R}(T) \cap T(D)$ 的一个 ε 网. 令 M 是这个 ε 网张成的子空间, M 是有限维的, 并且对于 $\forall y \in D, \operatorname{dist}(Ty, M) < \varepsilon$. 于是对于 $\forall x \in X$,

$$\inf\left\{\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - m'\right\| \,\middle|\, m' \in M\right\} \leqslant \varepsilon,$$

所以

$$\inf\{\|Tx - m\| \,|m \in M\} \leqslant \varepsilon\|x\|,$$

其中 $m = \|x\|\,m'$. □

注 换句话说, 可以找到一个有限维的子空间和 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 在上述意义下相距不超过 ε, 粗略地说 ε 越小, M 的维数越大. 由此对于一般的有界线性算子, 可以由此引进近似数、嵌入数和非紧测度等概念.

习 题 1.6

1. 下列算子在空间 $C[0,1]$ 上是紧算子吗?

(1) $(Tx)(t)=\int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{|t-s|}}\,\mathrm{d}s$;

(2) $(Tx)(t)=\int_0^1 (ts+t^2s^2)x(s)\,\mathrm{d}s$;

(3) $(Tx)(t)=\int_0^1 tg\frac{1}{|t-s|}x(s)\,\mathrm{d}s$;

(4) $(Tx)(t)=tx(t)$;

(5) $(Tx)(t)=\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

2. 考虑线性算子 T: $C[a,b]\to C[a,b]$,

$$(Tx)(s)=\int_a^b \frac{k(s,t)x(t)}{|s-t|^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad \forall x\in C[a,b],$$

其中 $k(s,t)$ 是 $a\leqslant t,\ s\leqslant b$ 上的连续函数, $0<\alpha<1$. 证明 T 是紧算子.

3. 证明按等式 $Jx=x$ 定义的嵌入算子 J: $C^1[a,b]\to C[a,b]$ 是紧算子, 其中 $C^1[a,b]$ 中的范数定义为

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|, \quad \forall x\in C^1[a,b].$$

4. 试证 Banach 空间 X 中的点集 M 是列紧的一个充分条件是

(1) M 是有界的;

(2) 存在强收敛于单位算子的紧算子序列 $\{T_n\}$, 使得在 M 上一致地有 $\|T_nx-x\|\to 0$.

5. 举例说明存在有界线性但非紧的算子 T, 使 T^2 是紧的.

6. 证明由 l^2 到 l 的任何有界线性算子必是紧的.

7. 设 T 为 l^2 上的线性算子, 记 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$ (第 n 个坐标为 1, 其余为 0), $n=1,2,\cdots$, 线性算子 T 定义为

$$Te_k=\sum_{j=1}^\infty a_{jk}e_j,$$

其中 $\sum_{k,j=1}^\infty |a_{jk}|^2<\infty$. 证明 T 是 l^2 上的紧算子.

8. 在 Hilbert 空间 l^2 中, $\{e_n\}$ 如上题, l^2 上的线性算子 A 定义为

$$Ae_i=\frac{1}{i}e_{i+1}, \quad i=1,2,\cdots.$$

证明 A 是 l^2 上的紧算子.

9. T: $l^p \to l^p, 1 \leqslant p < \infty$,

$$x = \{\xi_j\}, \quad y = \{\eta_j\} = Tx, \quad \eta_j = \xi_j / j.$$

证明 T 是紧的.

10. 设 $k(x, y)$ 是全平面上的可测函数, 而且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty,$$

定义 $L^2(-\infty, \infty)$ 上的线性算子 T:

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

问 T 是否是 $L^2(-\infty, \infty)$ 上的全连续算子.

11. 设 $k(s, t)$ 是定义在 $I \times I$ 上的可测函数满足

$$\int_I |k(s, t)| \, \mathrm{d}t \leqslant M, \quad \forall s \in I,$$

定义积分变换 K: $y = Kx$, 其中

$$y(s) = \int k(s, t) x(t) \, \mathrm{d}t,$$

证明 K 是定义在 $L^\infty(I)$ 上的有界线性算子. 如果 I 是紧集且测度有限, 映射 $s \to k(s, \cdot)$ 是从 I 到 $L_1(I)$ 中的连续映射, 证明 K 是紧的.

12. 设 $k(x, y)$ 是 $[a, b] \times [a, b]$ 上的可测函数, 设 $p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\int_a^b \left(\int_a^b |k(x, y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x < \infty,$$

线性算子 A 定义为

$$(Af)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

证明 A 是 L^p 上的紧算子.

13. 设 H 是 Hilbert 空间, 它具有可数的正规正交基 $\{e_1, e_2, \cdots\}$, 即 $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$. L: $X \to X$ 是紧的线性算子, 定义 L_n: $X \to X$,

$$L_n x = \sum_{i,j=1}^{n} (x, e_i)(Le_i, e_j) e_j.$$

证明 L_n 是紧的并且 $\|L_n - L\| \to 0 (n \to \infty)$.

14. 设 AP 表示定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足条件

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

的复值函数 $x(t)$ 的全体. 其上的内积定义为

$$(x,y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

设 $x_0\in AP$, 定义 $y=Lx$,

$$y(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_0(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

证明 (1) L 是从 AP 到 AP 中的有界线性映射;

(2) 若 $x_0(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}$, 其中 α 是个实数, 则 L 是自共轭的、紧的线性算子.

15. 证明 Hilbert 空间 H 上的正交投影 P 是紧的当且仅当 P 的值域是有限维的.

16. 设 L: $X\to Y$ 是紧算子, M 是 X 的线性子空间. 证明 L 在 M 上的限制, 即 L: $M\to Y$ 是紧的.

17. 设 L: $X\to X$ 是有界线性算子, 并满足 $\|Lx\|\geqslant\alpha\|x\|,\forall x\in X$, 其中 $\alpha>0$, 证明 L 是紧的当且仅当 X 是有限维的.

18. 设 X 是赋范线性空间, L: $X\to X$ 是等距同构的,

(1) 证明 L 是紧的当且仅当 X 是有限维的;

(2) 若 L 仅是拓扑同构时, (1) 中结论是否成立?

第二章　有界线性算子的谱

§2.1　谱集和正则点集

2.1.1　线性算子正则点和谱点的定义

线性算子的谱理论无论是在基础研究还是在应用研究中均占据着重要的位置，谱理论对于了解和刻画线性算子是十分重要的. 在有限维空间 X 上, 特征值刻画了线性算子的基本性质, 空间 X 按这些特征值可以分解成若干个关于这个算子的不变子空间. 我们研究线性算子的特征值, 首先考虑 $T_\lambda = \lambda I - T$, 其中 λ 是一个复数, I 是恒等算子. λ 取什么值时 T_λ 有逆算子, 当 T_λ 有逆算子 T_λ^{-1} 时, T_λ^{-1} 的性质如何等问题是谱理论所关心的基本问题.

在有限维空间, 对于 $T_\lambda x = 0$ 只有两种可能: (1) $T_\lambda x = 0$ 有非零解, 即 λ 是 T 的特征值; (2) $T_\lambda x = 0$ 无非零解, 即 λ 是 T 的正则点. 但在无穷维空间, 情况要复杂得多. 以下根据 λ 的分类, 给出谱点和正则点的定义:

定义 2.1.1　设 X 是复的 Banach 空间, T 是从 $\mathfrak{D}(T) \subset X$ 到 X 的线性算子. λ 称为 T 的正则点, 如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中稠密, 并且 $\lambda I - T$ 有连续的逆算子. 这样的 λ 的全体称为 T 的正则点集, 记为 $\rho(T)$, 有时把逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$, 称其为 T 的预解式.

预解集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的谱集, 记为 $\sigma(T)$, 即 $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$, 若 $\lambda \in \sigma(T)$, 称 λ 为 T 的谱点.

注 1　在这个定义中, 未要求 T 是有界线性算子, $\mathfrak{D}(T)$ 不一定是全空间.

注 2　我们还可以对 T 的谱集合作进一步的分类:

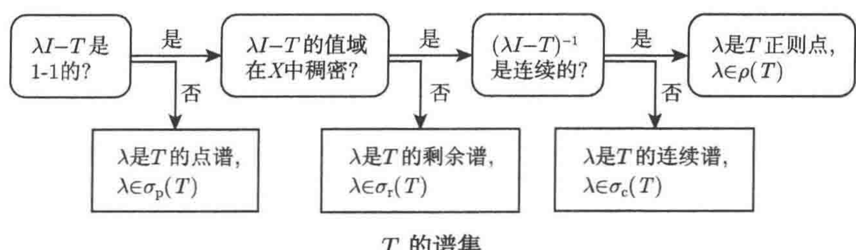
(1) λ 称为 T 的点谱, 如果 $\lambda I - T$ 不是一一的, 点谱的全体记为 $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$;

(2) λ 称为 T 的连续谱, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的, $\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密, 但是它的逆算子是不连续的, 连续谱的全体记为 $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$;

(3) λ 称为 T 的剩余谱, 如果 $\lambda I - T$ 是一一的, 但是 $\lambda I - T$ 的值域在 X 中不稠密, 剩余谱的全体记为 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$.

显然, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ 和 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$ 是互不相交的集合, 并且

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T). \tag{2.1.1}$$



T 的谱集

注 3 显然 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ 的充要条件是 $T_\lambda x=0$ 有非零解. λ 称为 T 的特征值, x 称为对应的特征元素, T_λ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I-T)$ 称为 T 关于 λ 的特征子空间, 它包括零元素和 T 的关于 λ 的全体特征元素. T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim\mathcal{N}(\lambda I-T)$ 称为特征值 λ 的几何重数.

注 4 上面定理提到的非零解必须属于 $\mathfrak{D}(T)\subset X$, 这在无穷维空间是十分重要的, 我们有以下例子:

例 2.1.2 设 $H=L^2(-\infty,\infty)$, T: $H\to H$, $y=Tx$, 其中

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

可以证明, $\mathfrak{D}(T)=H,\mathcal{R}(T)\subset H$, 当 $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}$ 时,

$$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\tau}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{1+\mathrm{i}w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt},\tag{2.1.2}$$

即如果 T 作用在 $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}$ 上, 得到 $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}w}x(t)$, 但是这并不意味着 $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}w}$ 是 T 的特征值, 事实上, $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}\notin L^2(-\infty,\infty)$. 可以证明 $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}w}$ 是算子 T 的连续谱 (习题 2.1 第 4 题).

命题 2.1.3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相同的特征值, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是对应的特征元素, 则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的.

证明 假如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的, 设 x_m 是第一个可以由前面的特征元素表示的元素, 即

$$x_m=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_{m-1}x_{m-1}.$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是特征元素, 于是

$$0=(\lambda_mI-T)x_m=\alpha_1(\lambda_m-\lambda_1)x_1+\cdots+\alpha_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})x_{m-1}.$$

由于 $\lambda_m\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,m-1)$, 且 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 是线性无关的, 推出 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=0$ 与 $x_m\neq0$ 矛盾. □

当 T 是闭算子, 特别是有界线性算子时 (见下面注 2), 有以下结论:

定理 2.1.4　设 X 是 Banach 空间, T 是从 $\mathfrak{D}(T) \subset X$ 到 X 的闭线性算子, 那么对于 $\forall\lambda \in \rho(T)$, $(\lambda I - T)^{-1}$ 是一个定义在全空间上的有界线性算子. (闭算子的定义见定义 3.1.2.)

证明　$\lambda \in \rho(T)$, 由于 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是有界的, 根据定理 1.2.18, 存在一个正数 $m > 0$, 使得

$$\|(\lambda I - T)x\| \geqslant m\,\|x\|, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T). \tag{2.1.3}$$

对于 $\forall y \in X$, 由于 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中稠, 存在 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda I - T)x_n = y, \tag{2.1.4}$$

由 (2.1.3) 知 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 列, 因 X 是 Banach 空间, 存在 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 由于 T 是闭算子, 结合 (2.1.4) 有 $x \in \mathfrak{D}(T), (\lambda I - T)x = y$, 即 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. □

注 1　当 T 是闭线性算子时, $\lambda \in \rho(T)$, 当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$ 且 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathfrak{B}(X)$.

注 2　当 T 是有界线性算子并且 $\mathfrak{D}(T)$ 闭时, 由定理 3.1.5 知上述结论亦成立.

例 2.1.5　设 X 是有限维的 Banach 空间, T 是从 X 到 X 的线性算子, 因为

$$\dim(\mathcal{N}(\lambda I - T)) + \dim(\mathcal{R}(\lambda I - T)) = \dim X,$$

其中 dim 表示空间的维数, 因此 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$, 从而 T 的剩余谱是空集. 若 $\lambda I - T$ 是一一的, $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在, 又由有限维空间上的线性算子是连续的, 故 T 的连续谱也是空的, 即在有限维空间只有纯点谱, $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T)$. 如果 (t_{ij}) 表示 T 在 X 的一组基下的相应的矩阵, 则

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \det(\lambda\delta_{ij} - t_{ij}) = 0\}. \tag{2.1.5}$$

例 2.1.6　在 Hilbert 空间 $H = l^2[1, \infty)$ 上, 定义右移算子 T: $l^2 \to l^2$,

$$T\colon (x_1, x_2, \cdots) \to (0, x_1, x_2, \cdots),$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$. 由于

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2,$$

有 $\|T\| = 1$. 因为 $Tx = 0$ 意味着 $x = 0$, 即 0 不是特征值. 显然 T 的值域 $\mathcal{R}(T) = \{y = \{y_i\} \mid y_1 = 0\}$ 在 H 中不稠, 于是 $0 \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$.

注　上例说明在无穷维空间, 线性算子可以有不是特征值的谱点.

2.1.2 线性算子谱的例

下面给出一些实例, 说明对于线性算子, 给出具体的谱点和分类并不是容易的.

例 2.1.7 令 $H=l^2(-\infty,\infty)$. 定义右移算子 $S_{\rm r}$: $H\to H, y=S_{\rm r}x$, 其中

$$\begin{cases} x &= (\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots),\\ y &= (\cdots,y_{-1},y_0,y_1,\cdots),\\ y_k &= x_{k-1},\quad k=\cdots,-1,0,1,\cdots. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

$S_{\rm r}$ 是一类重要的线性算子, 差分算子可以由 $S_{\rm r}$ 的多项式生成. 为研究 $S_{\rm r}$ 的谱分解, 首先考虑 $\lambda I-S_{\rm r}$ 是不是一一的. 令 $x\in H$, 且

$$(\lambda I-S_{\rm r})x=0,$$

即

$$\lambda x_k-x_{k-1}=0,\quad k=\cdots,-1,0,1,\cdots. \tag{2.1.7}$$

当 $\lambda=0$, 推出 $x=0$, 即 $S_{\rm r}$ 是一对一的. 对 $\lambda\neq 0$, 由 (2.1.7) 推知,

$$x=\{\cdots,c\lambda,c,c\lambda^{-1},\cdots\}, \tag{2.1.8}$$

其中 c 是一个常数, 但 (2.1.8) 中的 x 属于 H 当且仅当 $c=0$, 因此 $\lambda I-S_{\rm r}$ 是一一的, 即 $\sigma_{\rm p}(S_{\rm r})=\varnothing$.

下面根据定义 2.1.1, 考虑值域 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 H 中是否稠密. 首先设 $|\lambda|>1$, 由

$$(\lambda I-S_{\rm r})x=y, \tag{2.1.9}$$

对于 $\forall y\in H$, 可求出 $x=\{x_k\}$:

$$x_k=\frac{y_k}{\lambda}+\frac{y_{k-1}}{\lambda^2}+\frac{y_{k-2}}{\lambda^3}+\cdots,\quad k=\cdots,-1,0,1,\cdots, \tag{2.1.10}$$

使得 $y=(\lambda I-S_{\rm r})x$. 事实上,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N}|x_k|^2&=\sum_{k=-N}^{N}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y_{k-j}}{\lambda^{j+1}}\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\overline{y}_{k-l}}{\overline{\lambda}^{l+1}}\right\}\\ &\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda^{j+1}||\overline{\lambda}^{l+1}|}\left|\sum_{k=-N}^{N}y_{k-j}\overline{y}_{k-l}\right|\\ &\leqslant\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda^{j+1}|}\right\}^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|y_k|^2,\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

即 $x \in H$, 且

$$\lambda x_k - x_{k-1} = \lambda\left\{\frac{y_k}{\lambda} + \frac{y_{k-1}}{\lambda^2} + \cdots\right\} - \left\{\frac{y_{k-1}}{\lambda} + \frac{y_{k-2}}{\lambda^2} + \cdots\right\} = y_k.$$

所以对于 $|\lambda| > 1, \mathcal{R}(\lambda I - S_{\mathrm{r}}) = H$, 且逆算子 $(\lambda I - S_{\mathrm{r}})^{-1}$ 由 (2.1.10) 给出. (2.1.11) 说明 $(\lambda I - S_{\mathrm{r}})^{-1}$ 是有界的, 于是当 $|\lambda| > 1$ 时, $\lambda \in \rho(S_{\mathrm{r}})$.

当 $|\lambda| < 1$ 时, 可以证明 $\mathcal{R}(\lambda I - S_{\mathrm{r}}) = H$. 事实上, 对于 $\forall y \in H$, 由 (2.1.9) 可求出

$$x_k = -y_{k+1} - \lambda y_{k+2} - \lambda^2 y_{k+3} - \cdots, \quad k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \tag{2.1.12}$$

使用与上面相似的办法, 可知 $\mathcal{R}(\lambda I - S_{\mathrm{r}}) = H$, 且 $(\lambda I - S_{\mathrm{r}})^{-1}$ 是有界的, 即 $\lambda \in \rho(S_{\mathrm{r}})$.

对于 $|\lambda| = 1$, 首先考虑 $\lambda = 1$ 的情况, 对于 $\forall x \in H$, 由 (2.1.9) 有

$$y_k = x_k - x_{k-1}, \tag{2.1.13}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{K=-N}^{M} y_k =&(x_{-N} - x_{-N-1}) + (x_{-N+1} - x_{-N}) + \cdots \\ &+ (x_{M-1} - x_{M-2}) + (x_M - x_{M-1}) \\ =&x_M - x_{-N-1},\end{aligned}$$

由于 $x \in H$, 因此 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} y_k = 0$, 即 $\mathcal{R}(I - S_{\mathrm{r}}) \subset M$, 其中

$$M = \left\{y = \{y_k\} \in H \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k = 0\right\}.$$

下面证明 $\mathcal{R}(I - S_{\mathrm{r}}) = M_1$ 是 M 的真子集, 这里

$$M_1 = \left\{y \in M \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k + y_{k-1} + y_{k-2} + \cdots|^2 < \infty\right\}. \tag{2.1.14}$$

先证 $\mathcal{R}(I - S_{\mathrm{r}}) \subset M_1$. $\forall x \in H$, 由 (2.1.13) 定义 $y = \{y_k\}$. 由于

$$x_k = y_k + x_{k-1}, \quad k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots,$$

于是

$$x_k = y_k + y_{k-1} + x_{k-2} = \cdots = y_k + y_{k-1} + \cdots + y_{k-N} + x_{k-N-1}. \tag{2.1.15}$$

由于 $x \in H = l^2(-\infty, +\infty)$, $\lim\limits_{N\to\infty} x_{k-N-1} = 0$, 所以

$$x_k = \sum_{i=0}^{\infty} y_{k-i} = y_k + y_{k-1} + \cdots, \quad k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots,$$

于是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k + y_{k-1} + \cdots|^2 < \infty.$$

反之, 对于 $\forall y \in M_1$, 令 $x = \{x_k\}$, 其中

$$x_k = y_k + y_{k-1} + \cdots.$$

由 (2.1.14), $x \in H$, 且 $x_k - x_{k-1} = y_k$, 即 $y \in \mathcal{R}(I - S_{\mathrm{r}})$. 于是 $\mathcal{R}(I - S_{\mathrm{r}}) = M_1$.

可以证明, M_1 在 H 中是稠密的. 事实上, 对于 $z = \{z_k\} \in H$ 及 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$\sum_{k=-\infty}^{-N-1} |z_k|^2 < \varepsilon \quad \text{和} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |z_k|^2 < \varepsilon. \tag{2.1.16}$$

令 $y = \{y_k\} \in H$, 满足

$$y_k = z_k, \quad -N \leqslant k \leqslant N,$$

令 $c = \sum\limits_{k=-N}^{N} z_k$, 取 m 为正整数, 使得 $\dfrac{c^2}{m} < \varepsilon$, 令

$$y_{N+1} = -\frac{c}{m}, \quad y_{N+2} = -\frac{c}{m}, \quad \cdots, \quad y_{N+m} = -\frac{c}{m},$$

y 的其余项为零. 于是 $\sum\limits_{k=N+1}^{N+m} |y_k|^2 = m\dfrac{c^2}{m^2} < \varepsilon$,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k = \sum_{k=-N}^{N+m} y_k = \sum_{k=-N}^{N} y_k + \sum_{k=N+1}^{N+m} y_k = c + m\left(-\frac{c}{m}\right) = 0,$$

即 $y \in M_1$, 且由 (2.1.16),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |z_k - y_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{-N-1} |z_k|^2 + \sum_{k=N+1}^{N+m} |z_k - y_k|^2 + \sum_{k=N+m+1}^{\infty} |z_k|^2 < 5\varepsilon,$$

即 M_1 在 H 中稠密. 最后证明 $(I - S_{\mathrm{r}})^{-1}$ 是不连续的. 令 y^n 定义为

$$y^n = \left(\cdots, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \cdots, \frac{1}{2n}, 0, \frac{-1}{2n}, \frac{-1}{2n}, \cdots, \frac{-1}{2n}, 0, \cdots\right),$$

其中 $4n^2$ 项不为零. 显然 $y^n \in M_1$, 且 $\|y^n\| = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$. 令

$$x^n = (I - S_{\rm r})^{-1} y^n,$$

即 $x_k^n - x_{k-1}^n = y_k^n$, 于是有

$$\begin{gathered} x_k^n = 0, \quad k < -2n^2, \\ x_{-2n^2}^n = \frac{1}{2n}, \quad x_{-2n^2+1}^n = \frac{2}{2n}, \quad \cdots, \quad x_{-1}^n = \frac{2n^2}{2n}, \\ x_0^n = \frac{2n^2}{2n}, \quad x_1^n = \frac{2n^2-1}{2n}, \quad \cdots, \quad x_{2n^2-1}^n = \frac{1}{2n}, \\ x_k^n = 0, \quad k \geqslant 2n^2. \end{gathered}$$

因此

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k^n|^2 = \frac{1}{2n^2}[1 + 2^2 + \cdots + (2n^2)^2] = \frac{1}{2n^2} \frac{2n^2(2n^2+1)(4n^2+1)}{6},$$

即 $\left\|(I - S_{\rm r})^{-1} y^n\right\| \to \infty (n \to \infty)$, 于是 $1 \in \sigma_{\rm c}(S_{\rm r})$.

对于 $|\lambda| = 1$ 的情况, 考虑

$$y_k = \lambda x_k - x_{k-1}, \quad k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots,$$

其中 $|\lambda| = 1$, 令 $x_k = \lambda^{-k} z_k$, $y_k = \lambda^{-k+1} w_k$, 有

$$\lambda^{-k+1} w_k = \lambda^{-k+1} z_k - \lambda^{-k+1} z_{k-1},$$

即转变为 $\lambda = 1$ 的情况:

$$w_k = z_k - z_{k-1},$$

于是对于 $\forall |\lambda| = 1$, $\lambda \in \sigma_{\rm c}(S_{\rm r})$. □

注 1　从例 2.1.7 可以看出谱的定性分析是相当复杂的, 在上例中,

$$\sigma(S_{\rm r}) = \sigma_{\rm c}(S_{\rm r}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}, \quad \rho(S_{\rm r}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \neq 1\}.$$

注 2　例 2.1.7 中的 M_1 是 H 的子空间, 并且是 M 的真子空间. 事实上, 令 $y = \{y_k\}$, 其中

$$y_k = 0, \quad k < 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \quad \cdots, \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}, \cdots,$$

则 $y \in M$, 但由 $y_k = x_k - x_{k-1}$ 确定的 x,

$$x = \{x_k\} = \left(\cdots, c, c, \cdots, c, c+1, c+\frac{1}{\sqrt{2}}, \cdots, c+\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \cdots\right)$$

不在 $H=l^2(-\infty,\infty)$ 中, 即 $y\notin\mathcal{R}(I-S_{\rm r})=M_1$.

注 3 算子的谱与算子作用的空间有十分密切的关系. 在例 2.1.7 中, 令 $H=l^2[1,\infty)$, $S_{\rm r}$ 还是右移算子, 对于 $\forall\lambda$, 由 $(\lambda I-S_{\rm r})x=0$, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,)$, 得到

$$\begin{aligned}\lambda x_1&=0,\\ \lambda x_2-x_1&=0,\\ &\cdots\cdots\\ \lambda x_n-x_{n-1}&=0,\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

显然 $(\lambda I-S_{\rm r})x=0$ 只有零解, 即 $\sigma_{\rm p}(S_{\rm r})=\varnothing$. 与上例相似, 可以证明当 $|\lambda|>1$ 时, $\lambda\in\rho(S_{\rm r})$; 当 $|\lambda|=1$ 时, $\lambda\in\sigma_{\rm c}(S_{\rm r})$. 但是对于 $|\lambda|<1, \overline{\mathcal{R}(\lambda I-S_{\rm r})}\neq H$. 令 $\mathcal{R}(\lambda I-S_{\rm r})=M$, 则

$$M=\{y\in H\mid y\perp\varLambda\},$$

这里 $\varLambda=(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)$. 事实上, 对于 $\forall y=\{y_k\}\in M$, 令 $x=\{x_k\}$, 其中

$$\begin{aligned}x_1&=-y_2-\lambda y_3-\lambda^2y_4-\cdots,\\ x_2&=-y_3-\lambda y_4-\lambda^2y_5-\cdots,\\ &\cdots\cdots\\ x_k&=-y_{k+1}-\lambda y_{k+2}-\lambda^2y_{k+3}-\cdots,\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

利用与推导 (2.1.11) 相似的办法, 可以证明 $x\in H$, 且注意到 $y\perp\varLambda$, 则 $y=(\lambda I-S_{\rm r})x$, 即 $M\subset\mathcal{R}(\lambda I-S_{\rm r})$. 反之, 对于 $y\in\mathcal{R}(\lambda I-S_{\rm r})$, 存在 $x\in H$, 使得

$$\begin{aligned}&y_1=\lambda x_1,\\ &y_k=\lambda x_k-x_{k-1},\quad k=2,3,\cdots.\end{aligned}$$

由 $x\in H$ 和 $|\lambda|<1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}y_k=&\lambda x_1+\lambda(\lambda x_2-x_1)+\cdots+\lambda^{n-1}(\lambda x_n-x_{n-1})\\ =&\lambda^n x_n\to0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}y_k=0$, 即 $y\perp\varLambda$. 由于 $\varLambda\neq0$, M 不在 H 中稠, 所以 $|\lambda|<1$, $\lambda\in\sigma_{\rm r}(S_{\rm r})$. (比较例 2.1.6 和例 2.1.7.)

例 2.1.8 设 $H=l^2(-\infty,\infty)$, 考虑左移算子 S_l: $H\to H$, 对于 $x=(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots)\in H$, 令

$$y=S_lx=(\cdots,y_{-1},y_0,y_1,\cdots),$$

其中

$$y_k=x_{k+1},\quad k=\cdots,-1,0,1,\cdots. \tag{2.1.17}$$

显然, S_l 是 S_r 的逆算子, 即 $S_rS_l=S_lS_r=I$, 并且 S_l 是 S_r 的共轭算子, 即对于 $\forall x,y\in H$,

$$(S_rx,y)=(x,S_ly).$$

注意到 $\sigma_p(S_r)=\varnothing$, 与例 2.1.7 证明方法相似, 可以给出 S_l 的谱分解, 即 $\sigma_p(S_l)=\varnothing$; 当 $|\lambda|\neq 1$时, $\lambda\in\rho(S_l)$; 当 $|\lambda|=1$时, $\lambda\in\sigma_c(S_l)$.

下面的例子说明, 当空间 H 变化时, 左移算子的谱也产生一些变化.

例 2.1.9 设 $H=l^2[1,\infty)$, 考虑左移算子即 $S_l(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots)$. 与例 2.1.7 注中的右移算子 S_r 相比较, S_l 是它的共轭算子, 但不是 S_r 的逆算子 (S_l 是 S_r 的左逆, 即仅仅 $S_lS_r=I$).

首先研究 $(\lambda I-S_l)x=0$ 是否有非零解, 由

$$\lambda x_k-x_{k+1}=0,\quad k=1,2,\cdots, \tag{2.1.18}$$

求出 x:

$$x=(c,\lambda c,\lambda^2c,\cdots),$$

其中 c 是常数, 于是方程 (2.1.18) 有非零解, 当且仅当 $|\lambda|<1$. 也就是说, 当 $|\lambda|<1$ 时, $\lambda\in\sigma_p(S_l)$ (注意这个结论与例 2.1.7 注 3 中的结论 $\sigma_p(S_r)=\varnothing$ 完全不同); 当 $|\lambda|\geqslant 1$ 时, 可以使用与例 2.1.7 相似的方法证明 $\sigma_c(S_l)=\{\lambda\mid|\lambda|=1\};\rho(S_l)=\{\lambda\mid|\lambda|>1\}$.

例 2.1.10 (乘法算子) 设 $H=L^2(-\infty,\infty)$. T 定义为

$$(Tx)(t)=tx(t),\quad t\in(-\infty,\infty),$$

$$\mathfrak{D}(T)=\{x(t)\in L^2(-\infty,\infty)\mid tx(t)\in L^2(-\infty,\infty)\},$$

则 $\sigma(T)=\sigma_c(T)=(-\infty,\ \infty)$.

事实上, 求解方程 $(\lambda I-T)x=0$, 即 $(\lambda-t)x(t)=0$, 求出 $x(t)=0(t\neq\lambda)$, 即 $\lambda I-T$ 是一一的, $\sigma_p(T)=\varnothing$. 同时它的值域

$$\mathcal{R}(\lambda I-T)=\left\{y(t)\in L^2(-\infty,\infty)\,\middle|\,\frac{y(t)}{t}\in L^2(-\infty,\infty)\ 且\ y(\lambda)=0\right\}$$

在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中是稠密的, 即 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)=\varnothing$. 由 $(\lambda-t)x(t)=y$, 可以证明当 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ 时, $(\lambda I-T)^{-1}$ 有界, 于是 $\rho(T)=\{\lambda\mid\mathrm{Im}\lambda\neq 0\}$; 当 $\lambda\in\mathbb{R}$ 时, $(\lambda I-T)^{-1}$ 无界, 即 $\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{c}}(T)=\{\lambda\mid\mathrm{Im}\lambda=0\}=(-\infty,\infty)$.

进一步地, 如果 $H=L^2(I)$, I 是一个区间, $f(t)$ 是 I 上定义的连续复值函数, 定义乘法算子:

$$(Tx)(t)=f(t)x(t),\quad t\in I,$$

这里 $\mathfrak{D}(T)=\{x(t)\in L^2(I)\mid f(t)x(t)\in L^2(I)\}$. 假设对于每一个 λ, 集合 $\{t\in I\big|f(t)=\lambda\}$ 的 Lebesgue 测度等于零, 则 $\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{c}}(T)=\overline{f(I)}$.

注 T 可能不是有界线性算子.

习 题 2.1

1. 设 $X=C[0,1]$, A: $u(t)\to t\cdot u(t)$. 证明 A 有界且 $\sigma(A)=\sigma_{\mathrm{r}}(A)=[0,1]$.

2. 证明右移算子 S_{r}: $l^2\to l^2$, 即

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots)\to(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$$

的谱是闭的单位圆盘 $M=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$.

3. 若 λ 是等距线性算子 T 的特征值, 证明 $|\lambda|=1$.

4. 设 $H=L^2(-\infty,\infty)$, 定义 T: $H\to H, y=Tx$, 其中

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

证明 $\lambda=(1+\mathrm{i}w)^{-1}$ 是算子 T 的连续谱.

5. 求出 $y=Kx$ 的本征值, 其中 $y(t)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-3t\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$.

6. 证明若线性算子具有有穷秩, 则它的所有谱点都是点谱.

7. 假定 $k(t,\tau)\geqslant 0, a\leqslant t,\tau\leqslant b,\lambda$ 是 $y=Kx$ 的非零本征值, 其中 $y(t)=\displaystyle\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$, 若相应的本征元素 $\phi(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是正的. 证明 $\mathcal{N}(\lambda\mathrm{I}-K)$ 是一维的.

8. 设 X 是 Banach 空间 Y 中的闭线性子空间, 并设 L 是 Y 到其自身的线性算子, 且 $L(X)\subset X$. 令 $\sigma_Y(L)$ 表示 L: $Y\to Y$ 的谱集, $\sigma_X(L)$ 表示 L 限制在 X 上的算子的谱集. 证明 $\sigma_X(L)\subset\sigma_Y(L)$.

9. 设 H 是由全体形为 $x=\{\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots\}$ 且满足下列条件的元素组成的线性空间:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_k|^2r^{-2k}<\infty,$$

其中 r 是一个实数, H 上的内积定义为 $(x,y)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_k\bar{y}_kr^{-2k}$. 给出并讨论 H 上定义的左移和右移算子的谱分解.

10. 设 H 是由全体形如 $x = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ 且满足下列条件的元素构成的线性空间:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 r^{-2k} < \infty,$$

其中 r 是实数, H 上的内积定义为 $(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k \bar{y}_k r^{-2k}$. 给出并讨论 H 上定义的左移和右移算子的谱分解.

11. 讨论下列定义在 $l^2(-\infty, \infty)$ 上的算子的谱:

(1) $S_{\mathrm{r}} + 2I$;

(2) $S_{\mathrm{r}} + \lambda I$;

(3) $\beta S_{\mathrm{r}} + \lambda I$, 其中 $\beta \neq 0$;

(4) S_{r}^2;

(5) $\alpha S_{\mathrm{r}}^2 + \beta S_{\mathrm{r}} + 2I$, 其中 $\alpha \neq 0$.

12. 考虑定义在 $l^2[0, \infty)$ 上的算子 $T = S_{\mathrm{r}} + S_{\mathrm{l}}$. 证明 $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{c}}(T) = [-2, 2]$.

13. 考虑定义在 $l^2(0, \infty)$ 上的算子 Φ:

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots) = (\phi(1)x_1,\ \phi(2)x_2, \cdots),$$

其中 $\sup\limits_n |\phi(n)| < \infty$.

(1) 证明对 $\forall n, \phi(n) \in \sigma_{\mathrm{p}}(\Phi)$ 且 $\sigma(\Phi) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(\Phi)}$;

(2) Φ 是否自伴? 若不是的话, 在什么情况下是自伴的?

14. 考虑定义在 $l^2(0, \infty)$ 上的算子 $L = T + \Phi$, 其中 T, Φ 是练习 12、13 中所给定的, 假定 $\phi(n)$ 是实的.

(1) 证明若 $\lambda \in \sigma(L)$, 则 $|\lambda| \leqslant 2 + \|\Phi\|$, 其中 $\|\Phi\| = \sup\limits_n |\phi(n)|$;

(2) 证明 L 是自伴的;

(3) 证明 L 不是紧的;

(4) 假定 $\phi(n)$ 是实的, 且 $\phi(n) \to \lambda_0 (n \to \infty)$. 证明 $\sigma_{\mathrm{c}}(L) = [-2 - \lambda_0, 2 - \lambda_0]$;

(5) 若 $\phi(n) \to 0$ 且对某个 n 有 $|\phi(n)| > \sqrt{2}$. 证明 L 至少有一个特征值.

§2.2　谱集的基本性质

2.2.1　有界线性算子的谱

本节研究有界线性算子谱集的性质, 下面证明有界线性算子的谱集是复数域 $\mathbb{C}$ 中的非空有界闭集.

定理 2.2.1　设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$, 如果 $\|T\| < 1$, 则算子 $I - T$ 有有界逆算子, 并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \tag{2.2.1}$$

$$\|(I-T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|T\|}. \tag{2.2.2}$$

证明 考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \cdots, \tag{2.2.3}$$

记 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k$, 则对于任何的自然数 $m, n(m > n)$,

$$\|S_m - S_n\| = \left\|\sum_{k=n}^{m-1} T^k\right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|T\|^k.$$

由条件 $\|T\| < 1$ 知, S_n 是 $\mathfrak{B}(X)$ 中的 Cauchy 列, 因为 X 是 Banach 空间, 从而 $\mathfrak{B}(X)$ 是 Banach 空间, 所以 S_n 按算子范数收敛到一个有界线性算子, 即 (2.2.3) 按范数收敛. 由于

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{n-1}) = (I+T+T^2+\cdots+T^{n-1})(I-T) = I-T^n, \tag{2.2.4}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T\|^n = 0.$$

在 (2.2.4) 两边令 $n \to \infty$, 得到

$$(I-T)\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I-T) = I.$$

这说明算子 $I-T$ 有逆算子, 且

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

还可以得到

$$\| (I-T)^{-1} \| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1-\| T \|}.$$ □

定理 2.2.2 设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$, 则 $\sigma(T)$ 是有界集.

证明 对于 $|\lambda| > \|T\|$, 由于 $\lambda I - T = \lambda\left(I - \dfrac{1}{\lambda}T\right)$, $\left\|\dfrac{1}{\lambda}T\right\| < 1$, 由定理 2.2.1, $I - \dfrac{1}{\lambda}T$ 有有界的逆算子,

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n, \tag{2.2.5}$$

且由 (2.2.2),

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \leqslant \frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|-\|T\|},$$

于是

$$\left\|(\lambda I-T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|-\|T\|}, \tag{2.2.6}$$

即当 $|\lambda| > \|T\|, \lambda \in \rho(T)$. □

注 1 $\sigma(T) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant \|T\|\}$, 且由例 1.2.21 也可以看到: 当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, $\lambda I - T$ 的值域是全空间, $(\lambda I - T)^{-1}$ 定义在全空间上.

注 2 对于无界线性算子, 定理 2.2.2 的结论不能成立, 见例 2.1.10.

定理 2.2.3 设 T 是 Banach 空间 X 到 X 的有界线性算子, $\lambda \in \rho(T)$, 且 $|\mu| < \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\|^{-1}$, 则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$, 即 $\rho(T)$ 是一个开集.

证明 $\lambda \in \rho(T)$, 考虑

$$(\lambda+\mu)I - T = (\lambda I - T)[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}].$$

由于 $\left\|\mu(\lambda I-T)^{-1}\right\| < 1$, 由定理 2.2.1 $[I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]$ 有有界的逆算子, 于是

$$R_{\lambda+\mu}(T) = [I + \mu(\lambda I - T)^{-1}]^{-1} R_\lambda(T), \tag{2.2.7}$$

且可以表示为 $R_\lambda(T)$ 的幂级数,

$$R_{\lambda+\mu}(T) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu^n(R_\lambda(T))^{n+1}.$$ □

注 1 $T \in \mathfrak{B}(X)$, 则 $\sigma(T)$ 是位于闭球 $\{z \mid |z| \leqslant \|T\|\}$ 中的有界闭集.

注 2 从证明中看到, $z_0 \in \rho(T)$, 则集合 $\{z \mid |z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 因此

$$\operatorname{dist}(z_0, \sigma(T)) \geqslant \|R_{z_0}(T)\|^{-1}. \tag{2.2.8}$$

引理 2.2.4 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$,

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T). \tag{2.2.9}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}(\lambda I-T)^{-1} =&(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)(\mu I-T)^{-1}\\ =&(\lambda I-T)^{-1}[(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)](\mu I-T)^{-1}\\ =&(\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}+(\mu I-T)^{-1},\end{aligned}$$

引理得证. □

考虑在正则集 $\rho(T)$ 上定义的算子值函数, $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R_\lambda(T)$, 即从 $\rho(T)$ 到有界线性算子组成的 Banach 空间 $\mathfrak{B}(X)$ 上的一个映射. 称这个映射在 λ_0 点是连续的, 如果 λ, $\lambda_0 \in \rho(T)$ 且 $\lambda \to \lambda_0$ 时, 在算子范数收敛的意义下,

$$R_\lambda(T) \to R_{\lambda_0}(T) \quad (\|R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)\| \to 0, \lambda \to \lambda_0).$$

称这个映射是可微的, 如果当 $\lambda \to \lambda_0$ 时,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \tag{2.2.10}$$

在 $\mathfrak{B}(X)$ 中按算子的范数收敛.

定理 2.2.5 在正则集 $\rho(T)$ 中, 预解式 $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的算子值解析函数.

证明 首先证明 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 连续. 设 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 令 $h = \lambda - \lambda_0$, 由 (2.2.7),

$$R_\lambda(T) = R_{\lambda_0+h}(T) = [I + h(\lambda_0 I - T)^{-1}]^{-1} R_{\lambda_0}(T),$$

根据定理 2.2.1, 只要 $|h| < \dfrac{1}{2\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, 则 $\|R_\lambda(T)\| < 2\|R_{\lambda_0}(T)\|$. 根据引理 2.2.4,

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)\| &= |h|\|R_\lambda(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\| \leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|\|R_{\lambda_0}(T)\| \\ &\leqslant 2|h|\|R_{\lambda_0}(T)\|^2 \to 0 \quad (\lambda \to \lambda_0).\end{aligned}$$

再证 $R_\lambda(T)$ 关于 λ 可微. 由引理 2.2.4 和 $R_\lambda(T)$ 的连续性

$$\frac{R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda_0 - \lambda) R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T)}{\lambda - \lambda_0} \to -(R_{\lambda_0}(T))^2 \quad (\lambda \to \lambda_0). \qquad \square$$

定理 2.2.6 设 T 是有界线性算子, 则 $\sigma(T) \neq \varnothing$.

证明 假如不然, $\rho(T) = \mathbb{C}$, 由定理 2.2.5 知 $R_\lambda(T)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析. 当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, 由 (2.2.5) 及 (2.2.6)

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n,$$

且

$$\|R_\lambda(T)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}. \tag{2.2.11}$$

因此, $\|R_\lambda(T)\|$ 在复平面上有界.

对于 $\mathfrak{B}(X)$ 上的任意一个有界线性泛函 f (即 $f \in \mathfrak{B}(X)^*$), 令

$$u_f(\lambda) = f(R_\lambda(T)). \tag{2.2.12}$$

$u_f(\lambda)$ 是整个复平面上定义的数值函数, 由 f 的连续性、定理 2.2.5 及 (2.2.11) 知, $u_f(\lambda)$ 是全平面上的有界解析函数. 根据 Liouville 定理, $u_f(\lambda)$ 是与 λ 无关的常值函数.

由 Hahn-Banach 定理知, $\mathfrak{B}(X)$ 上存在足够多的线性泛函, 可以区别 $\mathfrak{B}(X)$ 中不同的元素. 由于对于 $\forall f \in \mathfrak{B}(X)^*$, $u_f(\lambda)$ 都是常值函数, 可以推知 $R_\lambda(T)$ 是与 λ 无关的常值算子. 由引理 2.2.4 推知 $R_\lambda(T) \equiv 0$, 这与 $I = (\lambda I - T)R_\lambda(T)$ 矛盾. □

定理 2.2.7　设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$, 则

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

证明　根据定理 1.3.7, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, 于是对于 $\lambda \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = (R_\lambda(T))^*,$$

即 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$. 反之 $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, 知 $\lambda \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$. □

2.2.2　近似点谱

定义 2.2.8　设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$. 复数 λ 称为 T 的近似点谱, 如果存在 X 中的一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 满足

$$\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.2.13}$$

全体近似点谱记为 $\sigma_{\mathrm{a}}(T)$.

注　根据定理 1.2.18, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{a}}(T)$ 当且仅当 $\lambda I - T$ 不是下方有界的.

定理 2.2.9　设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$, 则 $\sigma_{\mathrm{a}}(T)$ 是 $\sigma(T)$ 中的非空闭子集, 它包含 $\sigma(T)$ 的所有边界点.

证明　$\lambda \in \rho(T)$, $\lambda I - T$ 是下方有界的, 由近似点谱定义的注可以看到, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{a}}(T)$, 即 $\sigma_{\mathrm{a}}(T) \subset \sigma(T)$. 以下证明 $\sigma_{\mathrm{a}}(T)$ 是闭的, 即 $\mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{a}}(T)$ 是开的. 对于 $\forall\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{a}}(T)$, $\lambda I - T$ 是下方有界的, 即存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\|(\lambda I - T)x\| > \alpha\,\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

对于任意满足 $|\lambda' - \lambda| < \dfrac{\alpha}{2}$ 的 λ' 及任意的 $x \in X$, $\|x\| = 1$, 有

$$\|(\lambda' I - T)x\| > \|(\lambda I - T)x\| - |\lambda' - \lambda| > \frac{\alpha}{2},$$

于是 $\lambda' \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{a}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{a}}(T)$ 是 $\sigma(T)$ 中的闭子集.

如果 $\lambda \in \sigma(T)$, 且 λ 属于 $\sigma(T)$ 的边界点, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $z \in \rho(T)$ 使得 $|z - \lambda| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, 根据定理 2.2.3 注 2, $\left\|(zI - T)^{-1}\right\| > \dfrac{4}{\varepsilon}$. 因此存在 $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$

使得 $\|(zI-T)^{-1}x_0\| > \dfrac{2}{\varepsilon}$, 令

$$x_1 = \left\|(zI-T)^{-1}x_0\right\|^{-1}(zI-T)^{-1}x_0,$$

$\|x_1\| = 1$ 且

$$\begin{aligned}\|(\lambda I-T)x_1\| &\leqslant \|(\lambda I-T)x_1-(zI-T)x_1\| + \|(zI-T)x_1\|\\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\|x_0\|}{\|(zI-T)^{-1}x_0\|} < \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lambda \in \sigma_{\rm a}(T)$. 由于 $\sigma(T)$ 是非空闭集, 边界点不为空集, 于是 $\sigma_{\rm a}(T)$ 不为空集. □

定理 2.2.10 (1) $\sigma_{\rm c}(T) \cup \sigma_{\rm p}(T) \subset \sigma_{\rm a}(T)$;

(2) 如果 $\sigma_{\rm r}(T) = \varnothing$, 那么 $\sigma_{\rm a}(T) = \sigma(T)$.

证明 显然 $\lambda \in \sigma_{\rm p}(T)$, 则 $\lambda \in \sigma_{\rm a}(T)$. 如果 $\lambda \in \sigma_{\rm c}(T)$, 则 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在但无界, 即 $(\lambda I-T)$ 不是下方有界的, 推知 $\lambda \in \sigma_{\rm a}(T)$. 由 $\sigma_{\rm a}(T) \subset \sigma(T)$ 及 $\sigma_{\rm r}(T) = \varnothing$ 立即可推知 (2). □

2.2.3 有界线性算子的谱半径

定理 2.2.11 设 $T \in \mathfrak{B}(X)$, 则极限

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty}\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \tag{2.2.14}$$

存在.

证明 令 $a_k = \lg\left\|T^k\right\|$, 下面证明 $\dfrac{a_k}{k} \to \beta = \inf\dfrac{a_k}{k}\ (k\to\infty)$. 因为

$$\left\|T^{m+k}\right\| \leqslant \|T^m\|\left\|T^k\right\|,$$

有 $a_{m+k} \leqslant a_m + a_k$. 对于固定的正整数 m, $k = mq+p$, 其中 q, p 是整数且 $0 \leqslant p < m$. 那么 $a_k \leqslant qa_m + a_p$, 于是

$$\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{q}{k}a_m + \frac{a_p}{k}.$$

对于固定的 m, 令 $k\to\infty$, $\dfrac{q}{k} \to \dfrac{1}{m}$, 因此

$$\limsup\frac{a_k}{k} \leqslant \frac{1}{m}a_m.$$

由于 m 是任意的, $\limsup\dfrac{a_k}{k} \leqslant \beta$. 另一方面, $\dfrac{a_k}{k} \geqslant \beta$, 因此

$$\liminf\frac{a_k}{k} \geqslant \beta.$$

于是

$$\frac{a_k}{k} \to \beta = \inf_k \frac{a_k}{k} \quad (k \to \infty),$$

即

$$\|T^k\|^{\frac{1}{k}} \to \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \quad (k \to \infty).$$

□

定义 2.2.12　称 $r_\sigma(T) = \inf_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ 为有界线性算子 T 的谱半径.

定理 2.2.11 显示, 对于任何正整数 k, $r_\sigma(T) \leqslant \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}}$, 特别地,

$$r_\sigma(T) \leqslant \|T\|. \tag{2.2.15}$$

事实上, 谱半径刻画了谱的范围, 有

定理 2.2.13　$T \in \mathfrak{B}(X)$, 则

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|. \tag{2.2.16}$$

证明　令 $\alpha = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\beta = r_\sigma(T) = \inf_n \{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 首先证明 $\alpha \leqslant \beta$. 对于 $\forall \lambda \in \sigma(T)$, 可推知 $\lambda^n \in \sigma(T^n)$. 假如不然, $\lambda^n \in \rho(T^n)$, 由

$$\lambda^n - T^n = (\lambda I - T)P_\lambda(T) = P_\lambda(T)(\lambda I - T),$$

其中 $P_\lambda(T) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1}T^{n-j}$, 知 $\lambda I - T$ 的逆算子存在且有界, 即 $\lambda \in \rho(T)$, 矛盾. 所以由定理 2.2.2, $|\lambda^n| \leqslant \|T^n\|$, 即 $|\lambda| \leqslant \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 于是

$$|\lambda| \leqslant \beta = \inf_n \{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\},$$

这样 $\alpha \leqslant \beta$. 反之, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\lambda = \alpha + \varepsilon \in \rho(T)$, 根据定理 2.2.5, $R_\lambda(T)$ 是关于 λ 的解析函数, 因此它有唯一的 Laurent 展开. 由定理 2.2.2 知当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, 其展开式可以由 (2.2.5) 表示, 由 Laurent 展开的唯一性知 $R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}T^n$. 因此 $\|\lambda^n T^n\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 于是当 n 充分大时,

$$\|T^n\| \leqslant |\lambda|^n = (a + \varepsilon)^n.$$

于是

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant a + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, $\beta \leqslant \alpha$, 定理得证.

□

但是 (2.2.15) 中的严格不等号可以成立, 有

例 2.2.14 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = \{1\}$, $r_\sigma(T) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| < \|A\| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\|A\|$ 可由定义算出).

同时, 另一方面有:

定理 2.2.15 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$, $r_\sigma(T)$ 是 T 的谱半径, 则存在一个与范数 $\|\cdot\|$ 等价的范数 $\|\cdot\|_*$, 使得 $\|T\|_*$ 与 $r_\sigma(T)$ 任意接近.

证明 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 k, 使得

$$\left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant r_\sigma(T) + \varepsilon. \tag{2.2.17}$$

令 $r = r_\sigma(T)$, 对于任意 $x \in X$, 定义

$$\|x\|_* = (r+\varepsilon)^{k-1}\|x\| + (r+\varepsilon)^{k-2}\|Tx\| + \cdots + \left\|T^{k-1}x\right\|.$$

容易验证 $\|\cdot\|_*$ 是一个范数, 且

$$(r+\varepsilon)^{k-1} \| x \| \leqslant \| x \|_* \leqslant \left((r+\varepsilon)^{k-1} + (r+\varepsilon)^{k-2} \| T \| + \cdots + \| T^{k-1} \|\right) \| x \|,$$

即 $\|\cdot\|_*$ 与 $\|\cdot\|$ 等价. 由于

$$\|Tx\|_* = (r+\varepsilon)^{k-1}\|Tx\| + (r+\varepsilon)^{k-2}\left\|T^2x\right\| + \cdots + \left\|T^kx\right\|, \tag{2.2.18}$$

注意到 $r \leqslant \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant r+\varepsilon$, 则

$$\left\|T^kx\right\| \leqslant (r+\varepsilon)^k\|x\|. \tag{2.2.19}$$

由 (2.2.18) 和 (2.2.19) 有

$$\|Tx\|_* \leqslant (r+\varepsilon)\|x\|_*,$$

即 $r \leqslant \|T\|_* \leqslant r+\varepsilon$. □

例 2.2.16 令 $X = C[a,b]$, 考虑 Volterra 积分算子 K:

$$(Kx)(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad a \leqslant s \leqslant b,$$

其中核 $k(s,t)$ 是 $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ 上的连续函数. 通过归纳法可以证明

$$\left\|K^k\right\| \leqslant \frac{M^k(b-a)^k}{(k-1)!}, \quad k \geqslant 1, \tag{2.2.20}$$

其中 $M = \sup\limits_{s,t\in[a,b]} |k(s,t)|$. 由此得到 $r_\sigma(K) = 0$. 我们得到 $\sigma(K) = \{0\}$.

对于正常算子的谱半径, 有

定理 2.2.17 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的正常算子, 则谱半径 $r_\sigma(T)=\|T\|$.

证明 根据定理 1.5.14, $\|T^2\|=\|T\|^2$, 于是当 $n=2^m$(m 是正整数), $\|T^n\|=\|T\|^n$. 由定理 2.2.11 知

$$r_\sigma(A)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n=2^m}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n=2^m}}(\|T\|^n)^{\frac{1}{n}}=\|T\|.\qquad\square$$

习 题 2.2

1. 设 X 是 Banach 空间, $T\in\mathfrak{B}(X)$, n 是自然数, λ_0 是 T^n 的特征值, 则必存在 λ_0 的某个 n 次根是 T 的特征值.

2. 若 A: $H\to H$ 是复 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 试证 AA^* 和 A^*A 是自共轭的和正的, 并证明 AA^* 和 A^*A 的谱是实的, 而且不能包含负值. 对方阵 B 来说, 试问第二个论断的推论是什么?

3. 给定数列 $\{a_n\}$, 在空间 l^2 上定义算子 A 如下:

$$A\colon (x_1,x_2,\cdots)\mapsto(a_1x_1,a_2x_2,\cdots).$$

(1) 证明 $A\in\mathfrak{B}(l^2)$ 的充要条件是 $\exists M>0$, 使得 $|a_n|\leqslant M$;

(2) 若 $A\in\mathfrak{B}(l^2)$, 求 $\sigma(A)$ 并判别谱点类型.

4. 设 X 是 Banach 空间, $\{T_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathfrak{B}(X)$, $T\in\mathfrak{B}(X)$, $\|T_n-T\|\to0(n\to\infty)$. 证明如果 $\lambda_0\in\rho(T)$, 则当 n 充分大时, $\lambda_0\in\rho(T_n)$, 且 $\lim\limits_n(\lambda_0I-T_n)^{-1}=(\lambda_0I-T)^{-1}$.

5. 设 X 是 Banach 空间, $T\in\mathfrak{B}(X)$, $\alpha\in\rho(T)$, $A=R_\alpha(T)$. 证明

(1) 如果 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, 使 $\mu(\alpha-\lambda)=1$, 则 $\mu\in\sigma(A)$ 当且仅当 $\lambda\in\sigma(T)$;

(2) 如果 $\mu\in\rho(A)$, 且 $\mu(\alpha-\lambda)=1$, 则 $R_\mu(A)=\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\mu^2}R_\lambda(T)$.

6. 设 F 是复平面上有界的无穷闭集. $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ 是 F 的一个可数稠密子集, 在 l^1 中定义算子 T 为

$$y=Tx\colon\ \ y=\{\alpha_n\xi_n\},\quad x=\{\xi_n\}.$$

证明 (1) T 是从 l^1 到 l^1 的有界线性算子;

(2) 每个 α_n 都是 T 的特征值;

(3) $\sigma(T)=F$;

(4) $F\backslash(\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty)=\sigma_c(T)$.

7. 设 T 是 Banach 空间 X 上有界线性算子, 且 $T^2=T$. 证明如果 $T\neq0$, 且 $T\neq I$, 则 $\sigma(T)=\{0,1\}$.

8. 设 L 是从 X 到 X 上的有界线性映射, 假定 L^{-1} 存在且连续. 证明 $\sigma(L^{-1})=\sigma(L)^{-1}=\left\{\dfrac{1}{\lambda}\middle|\lambda\in\sigma(L)\right\}$.

9. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 证明

(1) $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ 按范数收敛, e^A 是一个有界线性算子;

(2) e^A 和 A 是可交换的;

(3) 如果 $\sigma(A)$ 位于复平面的左半平面, 则有 $\|e^{At}\| \to 0(t \to +\infty)$;

(4) 如果 u 是方程 $\frac{du}{dt} = Au$ 的解, 则 $\|u(t)\| \to 0(t \to \infty)$.

10. 设 $p(r)$ 是关于 r 的复系数多项式, 即 $p(r) = a_0 r^n + \cdots + a_n$, 其中 $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 0$. L 是复 Banach 空间 X 到其自身上的有界线性算子, 定义 $p(L) = a_0 L^n + \cdots + a_n I$. 证明 $\sigma(p(L)) = p(\sigma(L)) = \{p(\lambda) | \lambda \in \sigma(L)\}$.

11. 设 $X = C[0, \pi]$, 并定义 T: $\mathfrak{D}(T) \to X$, $x \mapsto x''$, 这里

$$\mathfrak{D}(T) = \{x \in X | x', x'' \in X, x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

证明 $\sigma(T)$ 非紧.

12. 证明对复 Banach 空间 X 上的任意算子 $T \in \mathfrak{B}(X)$,

$$r_\sigma(\alpha T) = |\alpha| r_\sigma(T), r_\sigma(T^k) = [r_\sigma(T)]^k \quad (k \in \mathbb{N}),$$

这里 r_σ 表示谱半径.

13. 设 H 是 Hilbert 空间, $S, T \in \mathfrak{B}(H)$, 则 $r_\sigma(ST) = r_\sigma(TS)$.

14. 设 H_1, H_2 是 Hilbert 空间, T 是从 H_1 到 H_2 上的双射算子. 证明

(1) 若 S 是从 H_1 到 H_2 中的算子, 且 $\mathfrak{D}(S) \supset \mathfrak{D}(T)$, $ST^{-1} \in \mathfrak{B}(H_2), r_\sigma(ST^{-1}) < 1$, $T + S$ 是闭的, 则 $T + S$ 也是双射;

(2) 若 $S \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ 且 $r_\sigma(T^{-1}S) < 1$, 则 $T + S$ 是双射.

15. 如果 X 是复 Banach 空间, $S, T \in \mathfrak{B}(X)$ 且 $ST = TS$, 证明 $r_\sigma(ST) \leqslant r_\sigma(S) \cdot r_\sigma(T)$.

16. 设 T 是有界正常算子, 证明

(1) $||T|| = \sup\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(T)\}$, 又若 P 是多项式, 则

$$||P(T)|| = \sup\{|P(\lambda)| | \lambda \in \sigma(T)\};$$

(2) 对于 $A \in \mathfrak{B}(H)$, 记 $r(A) \triangleq \sup\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(A)\}$, 则有 $||A||^2 = r(AA^*)$.

17. 设 X 是 Banach 空间, $T \in \mathfrak{B}(X)$, $t \in \mathbb{C}$, 证明若 $|t| < 1/r_\sigma(T)$, 则 $(1 - tT)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k T^k$ 在 $\mathfrak{B}(X)$ 中是收敛的.

18. 设 L 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, x, y 是 H 中的元素. 证明

(1) $f(\lambda) = ((\lambda I - L)^{-1} x, y), \lambda \in \rho(L)$ 是解析函数;

(2) 设 $R_\lambda = (\lambda I - L)^{-1}, \lambda, \mu \in \rho(L)$, 则有 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$, $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$;

(3) 若 $\mu \in \rho(L)$, 且 $|\mu - \lambda| \, \|R_\mu\| < 1$, 则 $\lambda \in \rho(L)$ 且 $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R_\mu^{n+1}$;

(4) $\frac{d^n}{d\lambda^n} R_\lambda = (-1)^n n! R_\lambda^{n+1}$.

19. 设 L,S,T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 这里 $L=T+S$. 假定 S^{-1} 存在且紧, $\|T\|\,\|S^{-1}\|<1$. 证明 L^{-1} 存在且是紧的.

20. 考虑定义在 $(C[0,T],\|\cdot\|_\infty)$ 上的 Volterra 积分算子 K:

$$y(t)=\int_0^t k(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

这里 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 sup 范数. 假定 $k(t,\tau)(0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T)$ 是连续的, 且满足 $|k(t,\tau)|\leqslant M$. 证明

(1) 若 $x\in C[0,T]$, 则 $|Kx(t)|\leqslant Mt\,\|x\|_\infty$;

(2) $|K^nx(t)|\leqslant(M^nt^n/n!)\,\|x\|_\infty$;

(3) $\left\|\left(\dfrac{1}{\lambda}K\right)^n\right\|\leqslant M^n\left(\dfrac{T}{|\lambda|}\right)^n\dfrac{1}{n!},\ \ \forall\lambda\neq0$;

(4) $(\lambda\mathrm{I}-K)^{-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{-n-1}K^n,\ \ \forall\lambda\neq0$;

(5) $\sigma(K)=\{0\}$.

21. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交基, $\{x_n\}$ 是 H 中满足以下条件的序列: 对任何复数序列 $\{a_n\}$, $\exists 0\leqslant\theta<1$, 使得 $\|\sum\limits_n a_n(e_n-x_n)\|^2\leqslant\theta^2\sum\limits_n|a_n|^2$.

(1) 证明 $Kx=\sum\limits_n(x,e_n)(e_n-x_n)$ 定义了 H 上的有界线性算子且 $\|K\|\leqslant\theta$;

(2) 设 $T=I-K$, 证明 $(1-\theta)\,\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant(1+\theta)\,\|x\|$, $x\in H$;

(3) 证明 $x_n=Te_n$.

22. 设 $A\in\mathfrak{B}(H_1,H_2)$, $B\in\mathfrak{B}(H_2,H_1)$.

(1) 对于 $\lambda\neq0,\lambda\in\rho(AB)$ 当且仅当 $\lambda\in\rho(BA)$, 此时有

$$(\lambda-BA)^{-1}=\frac{1}{\lambda}[I+B(\lambda-AB)^{-1}A];$$

(2) 说明 (1) 对于 $\lambda=0$ 不成立; (提示: 设 A 是使得 $\mathcal{R}(A)\neq H_2$ 的等距算子, 令 $B=A^*$.)

(3) 说明若至少有一个算子是双射的, 则 (1) 对于 $\lambda=0$ 也成立.(提示: $AB=A(BA)A^{-1}$.)

23. 设 $T\in\mathfrak{B}(H),N_T=\{x\in H|T^nx\to0(n\to\infty)\}$, $B_T=\{x\in H|\{T^nx\}$ 是有界的$\}$. 证明

(1) 若 $r_\sigma(T)<1$, 则 $N_T=H$;

(2) 若 $B_T=H$, 则 $r_\sigma(T)\leqslant1$;

(3) 一般情况下, 从 $N_T=H$ 并不能推出 $r_\sigma(T)<1$.

24. 设 H_1,H_2 是 Hilbert 空间, A, $A_n\in\mathfrak{B}(H_1,H_2)$, 且对 $\forall n\in\mathbb{N}$, A_n 是双射. 若 $A_n\to A$ 且 $\|A_n^{-1}\|\leqslant C(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 A 也是双射, 并有 $A_n^{-1}\to A^{-1}$.

§2.3　线性算子的几何分析

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 所谓 T 的几何分解即按照 T 的特征值把空间 H 分为一些部分 (可能是无穷多个), 使得 T 在每一个部分上是相对

简单的. 显然, 在有限维的情形, 线性算子 $A=(a_{ij})$ 可以按照它的特征值和相应的不变子空间来实现它的几何分解. 我们希望把它推广 (或者是部分地推广) 到无穷维的情形.

在第一章里, 我们讨论过有限个线性子空间的直接和, 现在把这一概念推广到无穷 (主要是可数无穷) 多个线性子空间. 这里主要研究 Hilbert 空间中相互正交的, 闭的线性子空间的正交和.

2.3.1 单位分解和投影算子的加权和

定义 2.3.1 Hilbert 空间 H 中的集合族 $\{M_n\}$ 称为是相互正交的, 如果 $M_n \perp M_m (n \neq m)$ 设 $\{M_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的相互正交的, 闭的线性子空间族, 称 M 是 $\{M_n\}$ 的正交和:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots . \tag{2.3.1}$$

如果对于 $\forall x \in M$, x 能唯一地表示为

$$x = x_1 + x_2 + \cdots , \tag{2.3.2}$$

其中 $x_n \in M_n (n=1,2,\cdots)$, 并且

$$\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2. \tag{2.3.3}$$

进一步地, 如果 $x_n \in M_n \ (n=1,2,\cdots)$, $\sum\limits_n \|x_n\|^2 < \infty$, 则存在 $x \in M$, 使得 $x = \sum\limits_n x_n$.

定义 2.3.2 在 Hilbert 空间 H 中, 一个算子列 $\{P_n\}$ (对于 $\forall n$, $P_n \neq 0$) 称为是单位分解的, 如果

(1) 每一个 P_i 都是正交投影算子;

(2) $P_n P_m = 0 \ (n \neq m)$;

(3) $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, 它的收敛是在强收敛的意义下.

注 1 $\{P_n\}$ 可以是有限个, P_n 均不是零算子. 为方便叙述, 下面都讨论 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的情况.

注 2 $I = s - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ 意味着对于 $\forall x \in H$, $\lim\limits_{m\to\infty} \left\| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n x - x \right\| = 0$.

命题 2.3.3 设 $\{P_n\}$ 是一个单位分解, $\mathcal{R}(P_n)$ 是 P_n 的值域, 则 $\mathcal{R}(P_n) \perp \mathcal{R}(P_m)$ $(n \neq m)$, 且 $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_n)$. 反之, $\{\mathcal{R}_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一族闭的线性子

空间, $\mathcal{R}_n \perp \mathcal{R}_m (n \neq m)$, 且 $H = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$, 令 P_n 是从 H 到 $\mathcal{R}_n$ 的正交投影算子, 那么 $\{P_n\}$ 是 H 的一个单位分解.

证明留给读者.

定义 2.3.4 H 是一个 Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的单位分解, $\{\lambda_n\}$ 是一个数列, 算子

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x, \quad x \in \mathfrak{D}(T) \tag{2.3.4}$$

称为投影算子的加权和, 其中 $\mathfrak{D}(T) = \left\{ x \in H \,\middle|\, \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n x \text{ 存在} \right\}$.

注 1 显然 T 是一个线性算子, 但 T 可能是无界的.

注 2 令 $T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n$, 则 T_m 是在强收敛的意义下收敛到 T.

例 2.3.5 在有限维空间, 若 A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的对称线性算子, A 可以表示为一个对称矩阵 $A = (a_{ij})$, A 在其特征子空间上的投影算子 $\{P_m\}_{m=1}^{k}$ 形成一个单位分解, 且 A 可以表示为投影算子的加权和

$$Ax = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m P_m x. \tag{2.3.5}$$

例 2.3.6 设 Hilbert 空间 $H = l^2[1, \infty)$, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交基, 即 $e_n = \{\delta_{1n}, \delta_{2n}, \cdots\}$. 令 P_n: $l^2 \to l^2$,

$$P_n x = (x, e_n) e_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

显然

$$Ix = x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x. \tag{2.3.6}$$

令

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} P_n, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

有

$$\|(I - S_m)x\| \to 0 \quad (m \to \infty),$$

即 $\{P_n\}$ 是 H 的一个单位分解. 注意 S_m 并不按算子的范数收敛到 I.

2.3.2 投影算子加权和的性质

投影算子的加权和是一类谱分解比较简单的线性算子.

定理 2.3.7 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是由 (2.3.4) 定义的投影算子的加权和, 则 $\mathfrak{D}(T)=H$ 当且仅当 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的.

证明 设集合 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的, 即存在 $M>0$, 使得 $\forall n$, $|\lambda_n|\leqslant M$. 对于 $\forall x\in H$, 由于 $\{P_n\}$ 是 H 的一个单位分解, $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|P_nx\|^2$, 令

$$y_m=\sum_{n=1}^{m}\lambda_nP_nx,$$

则

$$\|y_m-y_{m+p}\|^2=\sum_{n=m+1}^{m+p}|\lambda_n|^2\,\|P_nx\|^2\to 0\leqslant M^2\sum_{n=m+1}^{m+p}\|P_nx\|^2\to 0\quad(m\to\infty),$$

即 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 由于 H 是 Hilbert 空间, $\{y_n\}$ 在 H 中收敛, 有 $\mathfrak{D}(T)=H$.

反之, 如果 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是无界的, 则存在其中的一个子列 $\{|\lambda_{n_1}|,|\lambda_{n_2}|,\cdots\}$, 使得 $|\lambda_{n_k}|\geqslant k$, 令 $x_{n_k}\in\mathcal{R}(P_{n_k})$, 且 $\|x_{n_k}\|=1$. 定义 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_{n_k}}x_{n_k}$, 则 $x\in H$, 但是注意到 $\{x_{n_k}\}$ 是相互正交的单位元素, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_nx=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{n_k}$ 在 H 不收敛, 即 $x\notin\mathfrak{D}(T)$, $\mathfrak{D}(T)\neq H$. □

注 1 所以看到, 当 $\{\lambda_n\}$ 无界时, 它的定义域不是全空间.

注 2 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中总是稠密的, 即 $\overline{\mathfrak{D}(T)}=H$. 事实上, 对于 $\forall x\in H$, 由于 $\{P_n\}$ 是单位分解, x 可以写成

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots,$$

其中 $x_n\in\mathcal{R}(P_n)$ $(n=1,2,\cdots)$. 于是对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 n, 使得

$$\|x-x_1-x_2-\cdots-x_n\|<\varepsilon,$$

而 $x_1+x_2+\cdots+x_n\in\mathfrak{D}(T)$.

定理 2.3.8 定理 2.3.7 中的投影算子加权和是有界的当且仅当 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的, 并且 $\|T\|=\sup\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$.

证明 假设 $\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$ 是有界的, 令 $M=\sup\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots\}$, 于是

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&=\left\|\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\lambda_nP_nx\right\|^2=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}|\lambda_n|^2\,\|P_nx\|^2\\&\leqslant M^2\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\|P_nx\|^2=M^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

即 T 是有界的, 且 $\|T\| \leqslant M$. 反之, T 是有界线性算子, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$. 对于任意的 n, 令 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 且 $\|x_n\| = 1$, 由 $Tx_n = \lambda_n x_n$, 有 $\|T\| \geqslant |\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 即 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$ 有界, 且 $\|T\| = \sup\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots\}$. □

结合定理 2.3.7 和定理 2.3.8 有

定理 2.3.9 Hilbert 空间 H 上的投影算子的加权和 T 是有界的充分必要条件是 $\mathfrak{D}(T) = H$.

2.3.3 投影算子加权和的谱

下面来考虑投影算子加权和的谱分析, 根据线性算子谱的定义, 从分析 $\lambda I - T$ 是否是一一的, 其值域是否稠密入手. 注意到

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)P_n x, \quad x \in \mathfrak{D}(T), \tag{2.3.7}$$

$\lambda I - T$ 也是投影算子的加权和.

引理 2.3.10 $\lambda I - T$ 是一一的当且仅当 $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

证明 考虑方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 的解, 由于 $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}(P_n)$, 则 $x \in H$ 可以唯一地写为 $x = x_1 + x_2 + \cdots$, 其中 $x_n \in \mathcal{R}(P_n)$. 于是

$$(\lambda I - T)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_n)x_n = 0.$$

如果 $\lambda \neq \lambda_n$, 则对于任意的 n, $x_n = 0$, 即 $x = 0$, $\lambda I - T$ 是一一的. 如果 $\lambda = \lambda_{n_0}$, 于是对于 $x_{n_0} \in \mathcal{R}(P_{n_0})$, $\|x_{n_0}\| = 1$, $(\lambda I - T)x_{n_0} = 0$, $\lambda_{n_0}I - T$ 不是一一的, λ_{n_0} 是投影算子加权和 T 的特征值, 可以得到

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}. \tag{2.3.8}$$

引理 2.3.11 设 T 为 Hilbert 空间 H 上的投影算子加权和, 则 $\lambda I - T$ 的值域在 H 中是稠密的, 当且仅当 $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

证明 如果 $\lambda = \lambda_n$, $\lambda I - T$ 的值域正交于 $\mathcal{R}(P_n)$, 由于 $P_n \neq 0$, $\mathcal{R}(P_n)$ 是非空的闭子空间, 所以 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中不稠密. 如果 $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 对于任何的 $y \in H$,

$$y = y_1 + y_2 + \cdots,$$

其中 $y_n \in \mathcal{R}(P_n)$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得

$$\|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_N\| < \varepsilon.$$

令 $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{N} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n$, 则 $x_0 \in \mathfrak{D}(\lambda I - T)$, 且

$$y_0 = (\lambda I - T)x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_N,$$

即 $y_0 \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, 且 $\|y - y_0\| < \varepsilon$, 我们有 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 H 中稠. □

注 引理 2.3.10 和引理 2.3.11 说明 $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \varnothing$.

引理 2.3.12 设 T 为 Hilbert 空间 H 上投影算子的加权和, 则 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$ 当且仅当存在一个正数 $\delta > 0$, 使得对于所有的 n, $|\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta > 0$(即 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 和零有正距离).

证明 如果 $\{|\lambda - \lambda_n|\}$ 和零有正距离. 对于 $\forall y \in H, y = y_1 + y_2 + \cdots$, 其中 $y_n \in \mathcal{R}(P_n)$. 令

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} y_n.$$

由于

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2, \tag{2.3.9}$$

可知 $x \in H$, 且

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)x &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) P_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_m)^{-1} y_m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{\lambda - \lambda_n} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y,\end{aligned}$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$.

反之, 如果 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$. 对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(\lambda I - T)$, $y = (\lambda I - T)x$, 根据定义

$$y = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} (\lambda - \lambda_n) P_n x. \tag{2.3.10}$$

$\lambda \neq \lambda_n \, (n = 1, 2, \cdots)$, 根据定理 1.4.6, $(\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n$ 是连续的, 结合 (2.3.10) 有

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_k)^{-1} P_k y &= (\lambda - \lambda_k)^{-1} P_k \left(\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} (\lambda - \lambda_n) P_n x \right) \\ &= \lim_{m \to \infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} P_k \sum_{n=1}^{m} (\lambda - \lambda_n) P_n x = P_k x.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} P_k y = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x = x, \tag{2.3.11}$$

即 $(\lambda I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_n$ 也是投影算子的加权和. 由于

$$\mathfrak{D}((\lambda I-T)^{-1})=\mathcal{R}(\lambda I-T)=H,$$

根据定理 2.3.7 推知, $\{|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}$ 是有界的, 即 $\exists\delta>0$, $|\lambda-\lambda_n|^{-1}\leqslant\delta^{-1}(n=1,2,\cdots)$. 换言之 $|\lambda-\lambda_n|\geqslant\delta>0$, 即 $\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 和零有正距离. □

推论 2.3.13　如果 $\lambda\neq\lambda_n$, 则投影算子的加权和 $\lambda I-T$ 的逆算子存在,

$$(\lambda I-T)^{-1}y=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_n)^{-1}P_nx,\quad y\in\mathcal{R}(\lambda I-T),\tag{2.3.12}$$

并且逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$ 有界的充要条件是 $\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注 1　$\lambda\in\rho(T)$ 当且仅当 $\{|\lambda-\lambda_n|\}$ 与零有正距离.

注 2　$\lambda\in\sigma_c(T)$ 当且仅当 (1) $\lambda\neq\lambda_n$; (2) λ 是 $\{\lambda_n\}$ 的一个聚点.

注 3　$\sigma(T)=\overline{\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}}$.

定理 2.3.14　设 T 是投影算子的加权和, 即

$$T=s-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n,$$

其中 $\{P_n\}$ 是单位分解的, 且 T 是有界的, 则 T 的共轭算子 T^* 为

$$T^*=s-\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda}_nP_n.\tag{2.3.13}$$

证明　对于 $\forall x,y\in H$, 由于 P_n 是自共轭的,

$$\begin{aligned}(y,Tx)&=\left(y,\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\lambda_nP_nx\right)=\lim_{m\to\infty}\left(y,\sum_{n=1}^{m}\lambda_nP_nx\right)\\&=\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\overline{\lambda}_nP_ny,x\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda}_nP_ny,x\right)=(T^*y,x).\end{aligned}$$

□

定理 2.3.15　有界线性算子 T 是投影算子的加权和, 则 T 是正常算子.

定理 2.3.16　有界线性算子 T 是投影算子的加权和

$$T=s-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n,$$

则 T 是自共轭的当且仅当所有的 λ_n 都是实的.

定理 2.3.17 投影算子的加权和 T 是紧的, 如果

(1) 对于每一个 $\lambda_n \neq 0$, P_n 的值域 $\mathcal{R}(P_n)$ 是有限维的;

(2) 对于每一个正数 $\alpha > 0$, 满足 $|\lambda_n| > \alpha$ 的 λ_n 的个数是有限的.

证明 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件 (2), 满足 $|\lambda_n| > \varepsilon$ 的只有有限个, 记为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. 令

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n P_n,$$

其中 P_n 是与 λ_n 相应的投影算子. 由条件 (1) T_m 是有穷秩的, 因此是紧的. 并且

$$\begin{aligned}\| (T - T_m)x \|^2 &= \left\| \sum_{\lambda_n \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_m} \lambda_n P_n x \right\|^2 \leqslant \sup_{\lambda_n \neq \lambda_1, \cdots, \lambda_m} |\lambda_n|^2 \left\| \sum_n P_n x \right\|^2 \\ &\leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2 .\end{aligned}$$

根据定理 1.6.22, T 是紧的线性算子. □

在下一节中 (见定理 2.4.5 后面的注), 可以看到这个条件是充分必要条件.

习 题 2.3

1. 设 $\{P_1, \cdots, P_m\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个单位分解. 证明

$$\mathcal{R}(P_1) = \bigcap_{j=2}^{m} \mathcal{N}(P_j), \quad \mathcal{R}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \mathcal{N}(P_j).$$

2. 设 $\{P_1, \cdots, P_m\}(m \geqslant 2)$ 是单位分解. 证明 $\{Q_2, \cdots, Q_m\}$ 是单位分解, 这里 $Q_2 = P_1 + P_2, Q_i = P_i (3 \leqslant i \leqslant m)$.

3. 设 T 是 $\mathbb{C}^3$ 上的矩阵算子

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

求 T 的特征值与特征向量并确定相应的 T 的单位分解, 其中相应的投影算子用矩阵表示.

4. 设 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt} | n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是 $L^2[0,1]$ 的一组标准正交基. 设 P_n 是 $\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}\}$ 上的正交投影, Q_n 是 $\mathrm{span}(\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mt} | n < |m|\})$ 上的正交投影. 证明 $\{P_n || n| \leqslant N\} \cup \{Q_N\}$ 是单位分解.(注: 这里 $\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}\}$ 表示由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}$ 所张成的子空间.)

5. 设 $\{Q_1, \cdots, Q_m\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一族非零正交投影算子,

$$H = \mathcal{R}(Q_1) \cup \cdots \cup \mathcal{R}(Q_m).$$

证明存在单位分解 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 使得 $P_1 = Q_1$ 且 $\mathcal{R}(Q_i) \subset \mathcal{R}(P_i)(i = 1, 2, \cdots, n \leqslant m)$.

6. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的标准正交集, $\{\mu_1, \cdots, \mu_m\}$ 是数集. 定义 L: $H \to H$,

$$Lx = \sum_{n=1}^{m} \mu_n (x, e_n) e_n.$$

证明(1) L 是有界线性算子;

(2) L 是正常的;

(3) $\|L\| = \max\{|\mu_n| | n = 1, \cdots, m\}$.

7. 设 L 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子. 证明若 L 是正交投影算子, 则 L 的特征值仅为 0 和 1, 或者是 0 或 1.

8. 设 $\{Q_1, \cdots, Q_m\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的单位分解, $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 是整数集 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的划分. 假定 $A_i \neq \varnothing \, (i = 1, 2, \cdots, n)$. 定义 $P_i = \sum\limits_{j \in A_j} Q_j$. 证明 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 是单位分解. (提示: 利用数学归纳法.)

9. 设 H 是 n 维复 Hilbert 空间, 并设 L: $H \to H$ 是自共轭算子, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 H 中的任一标准正交集, (l_{ij}) 是 L 在这组基下的矩阵表示, 设 $p(\lambda) = \det(l_{ij} - \lambda\delta_{ij})$. 证明

(1) L 的特征值恰是 $p(\lambda)$ 的零点. 因式 $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, 这里根 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ 是互不相同的, $m_i \geqslant 1$, 并且 $m_1 + \cdots + m_k = n$;

(2) 对于 $1 \leqslant i \leqslant k$, 设 $R_i = \{x \in H \,|\, Lx = \lambda_i x\}$ 证明 $\dim R_i = m_i$;

(3) 证明 $L = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$, 这里 P_i 是 R_i 上的正交投影算子.

10. 设 $\phi_1, \cdots, \phi_n, \psi_1, \cdots, \psi_n \in L_2(I)$, 并且 $k(s,t) = \sum\limits_{i=1}^{k} \phi_i(s)\overline{\psi_i(t)}$. 假定 $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$.

(1) 证明积分算子 $y = Kx$, $y(s) = \int_I k(s,t)x(t)\mathrm{d}t$ 是具有有穷秩的自共轭算子;

(2) 确定 K 的特征值及特征元素;

(3) 若特征值是非负的, $L^2(I)$ 中是否存在函数集 $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$, 使得 $k(s,t) = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i(s)\overline{\xi_i(t)}$. 若特征值是负的, 情况如何?

11. 设 K 是由 $y(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} k(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 所给定的 $L^2[-\pi, \pi]$ 上的线性算子. 证明在以下几种情形下, K 是具有有穷秩的自共轭算子, 并确定所有的非零特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$ 及相应的投影算子 $\{P_1, \cdots, P_m\}$ 使得 $K = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$.

(1) $k(t,\tau) = 4\cos(t - \tau)$;

(2) $k(t,\tau) = 1 + \cos(t - \tau)$;

(3) $k(t,\tau) = 1 + \cos(t - \tau) + \sin 2(t + \tau)$;

(4) $k(t,\tau) = \sin 3(t - \tau)$;

(5) $k(t,\tau) = \sum\limits_{n=1}^{N} \{a_n \cos n(t - \tau) + b_n \sin n(t - \tau)\}$.

12. 考虑定义在 $l^2(0, \infty)$ 上的算子 Φ,

$$\Phi\text{: } (x_1, x_2, \cdots) \to (\phi(1)x_1, \phi(2)x_2, \cdots).$$

(1) 证明 Φ 是投影算子的加权和;

(2) 求出 Φ 的谱;

(3) 假定对 $\forall n, \phi(n) \neq 0$, 证明 Φ^{-1} 存在且 Φ^{-1} 是投影算子的加权和, 并给出 Φ^{-1} 的谱;

(4) 进一步假定 $|\phi(n)| \to \infty(n \to \infty)$, 证明 Φ^{-1} 是紧的;

(5) 假定 $\phi(n) \to \lambda_0(n \to \infty)$, 这里 λ_0 是有限的. 证明 $(\Phi - \lambda_0 I)$ 是紧的.

13. 设 L 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\{\phi_n\}$ 是 L 的特征元素组成的标准正交集. 并令 M 是由 $\{\phi_n\}$ 张成的 H 的闭线性子空间. 假定 L 的每个特征元素都属于 M. 证明

(1) 若 $M = H$ (即 $\{\phi_n\}$ 是 H 的标准正交基), 则 L 是投影算子的加权和, 且 $\sigma(L) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(L)}$.

(2) 若 L 的连续谱包含一个非平凡区间, 则 $M \neq H$, 即 $\{\phi_n\}$ 不是 H 的基.

§2.4 紧线性算子的谱

2.4.1 紧线性算子的特征值

紧的线性算子的谱理论可以看成是有限维空间的线性算子 (矩阵) 特征值理论的推广, 它的许多结果与有限维情况十分相近. 紧的线性算子的谱分解是相对简单的, 而且是十分重要的.

定理 2.4.1 恒等算子 I: $X \to X$ 是紧的, 当且仅当 $\dim X < \infty$.

证明 如果 $\dim X = \infty$, 根据引理 1.1.12(Riesz 引理) 可以构造一个点列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n\| = 1$, 且 $\|x_n - x_m\| \geqslant \dfrac{1}{2}$ $(n \neq m)$, 因此 $\{x_n\}$ 无收敛的子列, 推知 I 不是紧的. □

推论 2.4.2 $\dim X = \infty$, A 是 X 到 X 的紧线性算子, 且 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 不是有界线性算子.

证明 如果 A^{-1} 有界, 由 $A^{-1}A = I$, 结合定理 1.6.21、定理 2.4.1 推出矛盾. □

注 1 如果 $0 \in \rho(A)$, A 是紧算子, 则 $\dim X < \infty$.

注 2 若 X 是无穷维的 Banach 空间, A 是紧算子, 且 A 是单射的, 则由 Banach 逆算子定理 $\mathcal{R}(A) \neq X$.

定理 2.4.3 设 A 是赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, 则对于 $\forall \alpha > 0$, A 的特征值 λ 满足 $|\lambda| > \alpha$ 的个数是有限的.

证明 假如不然, 存在 $\alpha_0 > 0$, 并且存在无穷多个互不相同的特征值 λ_n, $|\lambda_n| > \alpha_0$, 令 x_n 是对应于 λ_n 的一个特征元素, 根据命题 2.1.3, 不同的特征值对应的特征向量是线性无关的, 令 $M_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 于是对于 $\forall x \in M_n$, 存在唯一的表达式

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{2.4.1}$$

于是

$$(T-\lambda_n I)x=\alpha_1(\lambda_1-\lambda_n)x_1+\cdots+\alpha_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_{n-1},$$

即

$$(T-\lambda_n I)x\in M_{n-1},\quad \forall x\in M_n. \tag{2.4.2}$$

因为 M_{n-1} 是闭的, 由引理 1.1.12, 存在 $y_n\in M_n, \|y_n\|=1$,

$$\|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2},\quad \forall x\in M_{n-1}. \tag{2.4.3}$$

对于 $m<n$,

$$Ty_n-Ty_m=\lambda_n y_n+(Ty_n-\lambda_n y_n)-Ty_m, \tag{2.4.4}$$

由 (2.4.2), $Ty_n-\lambda_n y_n\in M_{n-1}$, 由于 $m\leqslant n-1$, $Ty_m\in M_{n-1}$, 根据 (2.4.3) 和 (2.4.4), 有

$$\| Ty_n-Ty_m \|=|\lambda_n|\left\|y_n+\frac{1}{\lambda_n}[(Ty_n-\lambda_n y_n)-Ty_m]\right\|\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_n|>\frac{\alpha_0}{2}, \tag{2.4.5}$$

即 $\{Ty_n\}$ 中无收敛的子列, 与 T 的紧性矛盾. □

推论 2.4.4 紧的线性算子 A 只有至多可数个不同的特征值, 并且除了 0 以外, 这些特征值无聚点.

定理 2.4.5 令 A 是从赋范空间 X 到 X 的紧的线性算子, $\lambda\neq 0$, 那么 $\lambda I-A$ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I-A)$ 是有限维的.

证明 考虑任意的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x_n\|\leqslant 1, x_n\in\mathcal{N}(\lambda I-A)$. 由于 A 是紧的, 不妨设 $\{Ax_n\}$ 是收敛的, 由于 $(\lambda I-A)x_n=0, \lambda\neq 0$, $x_n=\dfrac{1}{\lambda}Ax_n$, 于是 $\{x_n\}$ 也是收敛的, 根据定理 2.4.1, $\mathcal{N}(\lambda I-A)$ 是有限维的. □

注 定理 2.4.3 和定理 2.4.5 说明定理 2.3.17 的两个条件也是必要的.

2.4.2 紧算子的谱集

定理 2.4.6 A 是如上定义的紧线性算子, 则对于任意的正整数 n,

$$\dim\mathcal{N}(\lambda I-A)^n<\infty, \tag{2.4.6}$$

且

$$\{0\}\subseteq\mathcal{N}(\lambda I-A)\subseteq\mathcal{N}(\lambda I-A)^2\subseteq\cdots. \text{[1]} \tag{2.4.7}$$

---

① $\subseteq$ 表示包含于, $\subset$ 表示严格包含于.

证明 因为 $(\lambda I-A)0=0$, 由 $(\lambda I-A)^n x=0$ 可知 $(\lambda I-A)^{n+1}x=0$, 即 (2.4.7) 对于任何线性算子都成立. 注意到

$$(\lambda I-A)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^k$$
$$=\lambda^n I-A\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1}=\beta I-W, \tag{2.4.8}$$

其中 $\beta=\lambda^n, W=A\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}(-A)^{k-1}$. 根据定理 1.6.21 可知 W 是紧的, 由 (2.4.8) 和定理 2.4.5 知 $\dim\mathcal{N}(\lambda I-A)^n<\infty$. □

定理 2.4.7 设 X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, $\lambda\neq 0$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I-A)$ 是闭的.

证明 由定理 2.4.5 知 $\mathcal{N}(\lambda I-A)$ 是有限维的, 根据定理 1.4.9, 存在 X 的闭子空间 M, 使得

$$X=\mathcal{N}(\lambda I-A)\dot{+}M,\ M\cap\mathcal{N}(\lambda I-A)=\{0\}. \tag{2.4.9}$$

定义 T: $M\to X$,

$$Tx=(\lambda I-A)x,\ x\in M.$$

显然 $T\in\mathfrak{B}(M,X)$, 且 $\mathcal{R}(\lambda I-A)=\mathcal{R}(T)$. 以下只需证明 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的. 容易看到 T 是单射, 且存在 $m>0$, 使得

$$\|Tx\|\geqslant m\|x\|,\quad x\in M. \tag{2.4.10}$$

假如不然, 存在 $\{x_n\}\subset M, \|x_n\|=1(n=1,2,\cdots)$, 使得 $Tx_n\to 0(n\to\infty)$. 因为 A 是紧算子, 不妨设 Ax_n 收敛到 y, 由 $Tx_n=(\lambda I-A)x_n\to 0$, 可知 $\lambda x_n\to y$, 由于 M 是闭子空间, $y\in M$, 于是

$$Ty=\lim_{n\to\infty}T(\lambda x_n)=0.$$

由 T 是单射知 $y=0$, 但是与

$$\|y\|=\lim_{n\to\infty}\|\lambda x_n\|=|\lambda|>0$$

矛盾, 推出 (2.4.10) 成立.

以下证明 $\mathcal{R}(\lambda I-A)$ 是闭的. 对于 $\forall y$, 如果存在 $x_n\in M$, 且 $y_n=(\lambda I-A)x_n$, $y_n\to y(n\to\infty)$, 根据 (2.4.10) 知 $(\lambda I-A)^{-1}$ 是有界的, 由于 $\{y_n\}$ 是有界的,

且 $x_n = (\lambda I - A)^{-1}y_n$, 推出 $\{x_n\}$ 是有界的, 注意到 A 是紧的, 不妨设 $\{Ax_n\}$ 是收敛的, 由 $\lambda x_n = y_n + Ax_n$, $\lambda \neq 0$, 可以知道 $\{x_n\}$ 也是收敛的, 令 $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_0 \in M$, 于是

$$(\lambda I - A)x_0 = (\lambda I - A)(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

即 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的.

注　从定理的证明和 (2.4.10) 可以看出, 如果 $\lambda \neq 0$, 且逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 则逆算子有界, 即 $\sigma_c(A)\backslash\{0\} = \varnothing$.

以下讨论关于 A 的剩余谱.

定理 2.4.8　X 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \neq 0$. 若 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, 则 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$.

证明　假如不然, $\mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X$, 令 $X_0 = X$, $X_1 = (\lambda I - A)X_0 = \mathcal{R}(\lambda I - A)$, $X_2 = (\lambda I - A)X_1 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^2, \cdots$. 由定理 2.4.7 和 (2.4.8) 中的 W 是紧的, 可知 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是 X_0 的闭子空间. 由于 $X_0 \supset X_1$, 推知 $X_1 = (\lambda I - A)X_0 \supseteq (\lambda I - A)X_1 = X_2$, 由归纳可知:

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots, \tag{2.4.11}$$

即

$$X \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A) \supseteq \mathcal{R}(\lambda I - A)^2 \supseteq \cdots, \tag{2.4.12}$$

并且 $X_0 \supset X_1$. 以下证明如果 $X_{n-1} \supset X_n$, 则可知 $X_n \supset X_{n+1}$. 假如不然

$$X_n = X_{n+1} = (\lambda I - A)X_n. \tag{2.4.13}$$

于是对于 $\forall x \in X_{n-1}$, $(\lambda I - A)x \in X_n = X_{n+1}$, 由 (2.4.13), 存在 $y \in X_n$, 使得

$$(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)y.$$

由于 $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\}$, $(\lambda I - A)$ 是一一的, 推出 $x = y \in X_n$, 即 $X_{n-1} = X_n$ 矛盾. 结合 $X_0 \supset X_1$, 由数学归纳法知

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots. \tag{2.4.14}$$

根据 (2.4.14) 和引理 1.1.12 存在 $x_n \in X_n, \|x_n\| = 1$, 且

$$\mathrm{d}(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.4.15}$$

于是对于 $n > m$, 由

$$\frac{1}{\lambda}(Ax_m - Ax_n) = x_m + \left\{-x_n - \frac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda}\right\} = x_m - x, \tag{2.4.16}$$

其中 $x = x_n + \dfrac{(\lambda I - A)x_m - (\lambda I - A)x_n}{\lambda} \in X_{m+1}$. 由 (2.4.15) 和 (2.4.16) 有

$$\|Ax_m - Ax_n\| = |\lambda| \, \|x_m - x\| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} > 0,$$

即 $\{Ax_n\}$ 中不存在收敛的子列, 与 A 是紧算子矛盾. □

定理 2.4.8 说明 $\sigma_{\rm r}(A)\backslash\{0\} = \varnothing$.

综上我们有

定理 2.4.9 X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, 则

(1) $0 \in \sigma(A)$, 除非 $\dim X < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_{\rm p}(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma(A)$ 至多以 0 为聚点.

2.4.3 例

下面对于紧线性算子, 考虑 $\lambda = 0$ 的情况. 如果 X 是有限维的, 有两种可能, $0 \in \sigma(A) = \sigma_{\rm p}(A)$, 或者 $0 \in \rho(A)$; 当 X 是无穷维时, $0 \in \sigma(A)$, 并且三种情况

$$0 \in \sigma_{\rm p}(A), \quad 0 \in \sigma_{\rm r}(A), \quad 0 \in \sigma_{\rm c}(A)$$

都是有可能的. 以下三个例子说明这一点.

例 2.4.10 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为

$$Ax = \left(\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, \cdots\right),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, 可以证明 A 把 l^2 中的有界集映射成为列紧集, 即 A 是紧的线性算子. 显然 $Ax = 0$ 有非零解, $x = (\xi_1, 0, 0, \cdots)$, 其中 $\xi_1 \neq 0$, 即 $0 \in \sigma_{\rm p}(A)$.

例 2.4.11 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为

$$Ax = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots\right),$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

显然 A 是紧的线性算子, 当 $\lambda \neq 0$ 时, $(\lambda I - A)x = 0$ 只有零解, 即 $\lambda \notin \sigma_{\rm p}(A) (\lambda \neq 0)$. 可以证明 $\sigma(A) = \sigma_{\rm r}(A) = \{0\}$. A 没有特征值, 且唯一的谱点 0 是 A 的剩余谱.

例 2.4.12 设 A 是从 l^2 到 l^2 的线性算子, 定义为

$$Ax = \left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots\right),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$.

显然, A 也是紧的线性算子, 对于 $\lambda\neq\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, $\lambda\in\rho(A)$; $\lambda=\dfrac{1}{n},\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)$. 可以证明 $0\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)$.

习　题　2.4

1. 设 $\omega_n\in\mathbb{C},\omega_n\to 0(n\to\infty)$. 证明映射 T: $\{\xi_n\}\mapsto\{\omega_n\xi_n\}(\forall\{\xi_n\}\in l^p)$ 是 $l^p(p\geqslant 1)$ 上的紧算子.

2. 设 X 是 Banach 空间, A 是 X 到其自身上的紧算子, X_0 是 X 的闭子空间并使得 $A(X_0)\subset X_0$. 证明映射 T: $[x]\to[Ax]$ 是商空间 X/X_0 上的紧算子.

3. 设 X,Y,Z 是 Banach 空间, $X\subset Y\subset Z$, 如果 $X\to Y$ 的嵌入映射是紧的, $Y\to Z$ 的嵌入映射是连续的. 证明 $\forall\varepsilon>0$, $\exists c(\varepsilon)>0$ 使得

$$\|x\|_Y\leqslant\varepsilon\|x\|_X+c(\varepsilon)\|x\|_Z,\quad\forall x\in X.$$

4. 设 K: $L_2(I)\to L_2(I)$ 是积分算子, $y=Kx$,

$$y(t)=\int_I k(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

假定 I 是紧的, $k(t,s)$ 是连续的. 证明

(1) K 是紧的;

(2) 存在与非零特征值相对应的连续的特征函数;

(3) 与特征值 $\lambda=0$ 对应的特征函数情况如何?

5. 设 T: $l^2\to l^2$ 由 $y=(\eta_j)=Tx$, $x=(\xi_j)$, $\eta_j=\lambda_j\xi_j$ 定义, 其中 $\{\lambda_j\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一有界序列, 且 $a=\inf\lambda_j$, $b=\sup\lambda_j$. 证明每个 λ_j 是 T 的特征值. 问在什么条件下将有 $\sigma(T)\supset[a,b]$?

6. 设 $A\in\mathfrak{B}(X),X$ 是 Banach 空间, M 是 A 的有穷维的闭不变子空间. 证明

(1) A 在 M 上的作用可以用一个矩阵来表示;

(2) M 中存在 A 的特征元素.

7. 设 H_1,H_2 是 Banach 空间, 算子 T: $H_1\to H_2$ 有连续的逆 (不必定义在整个 H_2 空间上), 当且仅当 $\gamma=\inf\{\|Tx\|\,|x\in\mathfrak{D}(T),\|x\|\geqslant 1\}>0$, 并且有 $\|T^{-1}\|=\gamma^{-1}$.

8. 定理 2.4.5 的条件换成 $A^p(p\in\mathbb{N})$ 是紧的线性算子, 结论亦然成立.

9. 设 $X=C[-1,1]$, T 是定义在 X 上的线性算子, $(Tx)(s)=\displaystyle\int_{-1}^{1}k(s,t)x(t)\mathrm{d}t$, 核 $k(s,t)=a(t)b(s)$, a 和 b 在 $[-1,1]$ 上是连续的, 并且 a 在 $[-1,1]$ 中没有零点. 证明零是无穷重数的特征值, 并求出其他特征值及特征元素.

§2.5 紧线性算子的结构

2.5.1 紧线性算子的指标

本节讨论紧线性算子的 Fredholm-Riesz-Schauder 理论, 这一理论是有限维空间线性算子理论的直接推广. 我们已经知道紧的线性算子 A 关于 $\lambda \neq 0$ 的特征子空间, 即 $(\lambda I - A)$ 的零空间是有限维的, 还可以进一步研究它的有关的指标和谱分解. 首先我们定义线性算子的指标. T 是从 X 到 X 的线性算子, 令

$$T^0 = I, \quad T^1 = T, \quad T^2 = T \cdot T, \quad \cdots,$$

于是 $\mathfrak{D}(T^0) = X$, 且

$$\mathfrak{D}(T^n) = \left\{x \in \mathfrak{D}(T^{n-1}) | T^{n-1}x \in \mathfrak{D}(T)\right\}.$$

如果 $\mathfrak{D}(T) \neq X$, $\mathfrak{D}(T^n)$ 通常是 $\mathfrak{D}(T^{n-1})$ 的真子集.

T^n 的零空间 $\mathcal{N}(T^n)$ 定义为

$$\mathcal{N}(T^n) = \{x \in \mathfrak{D}(T^n) \, | T^n x = 0\}.$$

显然

$$\{0\} \subseteq \mathcal{N}(T^0) \subseteq \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^2) \subseteq \cdots, \tag{2.5.1}$$

并且

$$\mathcal{N}(T^{n+1}) = \{x \in \mathfrak{D}(T) | Tx \in \mathcal{N}(T^n)\}. \tag{2.5.2}$$

因此, 如果 $\mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^{n+1})$, 则对于 $\forall k > n$,

$$\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^n). \tag{2.5.3}$$

定义 2.5.1 使得 $\mathcal{N}(T^p) = \mathcal{N}(T^{p+1})$ 的最小非负整数 p 称为 T 的零指标 (ascent) 或者零链长, 记为 $p(T)$. 如果没有这样的整数存在, 记 $p(T) = \infty$.

注 $p(T) = 0$ 当且仅当 T 是一一的.

同样可以考虑 $\mathcal{R}(T^n)$, 由于 $X = \mathcal{R}(T^0) \supseteq \mathcal{R}(T^1)$, 有

$$X = \mathcal{R}(T^0) \supseteq \mathcal{R}(T) \supseteq \mathcal{R}(T^1) \supseteq \cdots, \tag{2.5.4}$$

$$\mathcal{R}(T^{n+1}) = T\left\{\mathcal{R}(T^n) \cap \mathfrak{D}(T)\right\}. \tag{2.5.5}$$

因此, 如果 $\mathcal{R}(T^n) = \mathcal{R}(T^{n+1})$, 那么对于 $\forall k > n$,

$$\mathcal{R}(T^k) = \mathcal{R}(T^n). \tag{2.5.6}$$

定义 2.5.2　使得 $\mathcal{R}(T^q)=\mathcal{R}(T^{q+1})$ 最小的非负整数 q 称为 T 的像指标 (descent) 或像链长, 记为 $q(T)$. 如果对于任意的 n, $\mathcal{R}(T^{n+1})$ 真包含在 $\mathcal{R}(T^n)$ 中, 则称 $q(T)=\infty$.

注　$q(T)=0$ 当且仅当 $\mathcal{R}(T)=\mathrm{X}$.

定理 2.5.3　设 X 是一个赋范空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, $\lambda\neq 0$, 那么存在一个最小整数 p, 当 $n\geqslant p$ 时, $(\lambda I-A)^n$ 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I-A)^n$ 都相等, 即 $\lambda I-A$ 的零链长 $p<\infty$. 并且如果 $p>0$, 那么

$$\{0\}\subset\mathcal{N}(\lambda I-A)\subset\cdots\subset\mathcal{N}(\lambda I-A)^p. \tag{2.5.7}$$

证明　为方便记 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}(\lambda I-A)^n$, 根据 (2.5.1)

$$\{0\}=\mathcal{N}_0\subseteq\mathcal{N}_1\subseteq\mathcal{N}_2\subseteq\cdots, \tag{2.5.8}$$

如果不存在 n, 使得 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$, 即 $\mathcal{N}_n$ 是 $\mathcal{N}_{n+1}$ 的真闭子空间, 由 Riesz 引理 1.1.12, 存在 $y_n\in\mathcal{N}_n$, $\|y_n\|=1$ 且对 $\forall x\in\mathcal{N}_{n-1}$,

$$\|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}, \tag{2.5.9}$$

对于 $m<n$,

$$Ay_m-Ay_n=-\lambda y_n-[(\lambda I-A)y_m-\lambda y_m-(\lambda I-A)y_n],$$

而 $x=(\lambda I-A)y_m-\lambda y_m-(\lambda I-A)y_n\in\mathcal{N}_{n-1}$, 于是由 $\lambda\neq 0$ 和 (2.5.9),

$$\|Ay_m-Ay_n\|=|\lambda|\left\|y_n-\frac{x}{\lambda}\right\|\geqslant\frac{|\lambda|}{2}>0, \tag{2.5.10}$$

与 $\{Ay_n\}$ 中应有收敛的子列矛盾. 因此存在 n, 使得 $\mathcal{N}_n=\mathcal{N}_{n+1}$. 结合 (2.5.3), 存在最小的 p, 使得 $\mathcal{N}_p=\mathcal{N}_{p+1}$, 即 (2.5.7) 成立, 定理得证. □

定义 2.5.4　X 是一个 Banach 空间, $T\in\mathfrak{B}(X)$, $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, X 的子空间

$$M_\lambda=\{x\in X\mid \text{存在 } n\in\mathbb{N},\ \text{使得 } (\lambda I-T)^n x=0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{N}(\lambda I-T)^n, \tag{2.5.11}$$

称为 λ 的代数特征子空间 (algebraic eigenspace), M_λ 的元素称为对应于 λ 的广义特征元素 (generalized eigenvector). M_λ 的维数 $\dim M_\lambda$ 称为特征值 λ 的代数重数.

注 1　显然特征值 λ 的代数重数大于或等于 λ 的几何重数 (参阅定义 2.1.1 注 3).

注 2　由定理 2.4.6 和定理 2.5.3, 紧的线性算子 A 的非零特征值 λ 有有限的代数重数, 即 $\dim\mathcal{N}(\lambda I-A)^p<\infty$.

定理 2.5.5 A 是如上定义的紧算子, $\lambda \neq 0$, 那么存在一个最小的整数 q, 当 $n \geqslant q$ 时 $(\lambda I - A)^n$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - A)^n$ 都是相等的. 即 $\lambda I - A$ 的像链长 $q < \infty$. 并且如果 $q > 0$, 那么

$$X \supset \mathcal{R}(\lambda I - A) \supset \cdots \supset \mathcal{R}(\lambda I - A)^q. \tag{2.5.12}$$

证明 令 $X_n = \mathcal{R}(\lambda I - A)^n$, 由 (2.5.4) 知

$$X \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots.$$

如果不存在 n, 使得 $X_n = X_{n+1}$, 由于 X_{n-1} 是真闭的子空间, 由 Riesz 引理, 存在 $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$ 且对于 $\forall x \in X_{n-1}$,

$$\|x_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

对于 $n > m$, 采用与定理 2.5.3 相似的方法, 得到 $\|Ax_m - Ax_n\| \geqslant \dfrac{|\lambda|}{2} > 0$, 与 A 是紧算子矛盾. 结合 (2.5.6), 存在最小的 q, 使得 $X_q = X_{q+1}$, 即 (2.5.12) 成立. □

定理 2.5.6 A 是如上定义的紧线性算子, $\lambda \neq 0$, $\lambda I - A$ 的零链长和像链长分别是 p 和 q, 则 $p = q$.

证明 先证 $q \geqslant p$. 由定理 2.5.5, $X_{q+1} = X_q$, 即 $(\lambda I - A)X_q = X_q$, 因此对于 $\forall y \in X_q$, 存在 $x \in X_q$, 使得

$$y = (\lambda I - A)x. \tag{2.5.13}$$

由此可以证明: 对于 $\forall x \in X_q$,

$$(\lambda I - A)x = 0, \text{ 可推出 } x = 0. \tag{2.5.14}$$

若 (2.5.14) 不成立, 存在 $x_1 \neq 0, x_1 \in X_q$, 且 $(\lambda I - A)x_1 = 0$. 对于 $x_1 \neq 0$, 由 (2.5.13), 存在 $x_2 \in X_q$, 使得 $x_1 = (\lambda I - A)x_2$, 于是对于任意的 n, 可以得到

$$0 \neq x_1 = (\lambda I - A)x_2 = (\lambda I - A)^2 x_3 = \cdots = (\lambda I - A)^{n-1} x_n.$$

但是 $0 = (\lambda I - A)x_1 = (\lambda I - A)^n x_n$, 即 $x_n \notin \mathcal{N}_{n-1}, x_n \in \mathcal{N}_n$, 于是对任意的 n 有 $\mathcal{N}_{n-1} \subset \mathcal{N}_n$, 与定理 2.5.3 矛盾, 于是 (2.5.14) 成立.

下面证明 $\mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$, 由 (2.5.1) 只需证明 $\mathcal{N}_{q+1} \subseteq \mathcal{N}_q$. 假如不然, 存在 x_0 使得 $(\lambda I - A)^q x_0 \neq 0$, 但是 $(\lambda I - A)^{q+1} x_0 = 0$. 令 $y = (\lambda I - A)^q x_0 \in X_q, y \neq 0$, 但 $(\lambda I - A)y = 0$ 与 (2.5.14) 矛盾, 于是 $\mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$. 由于 p 是使这个等式成立的最小整数, 有 $q \geqslant p$.

反过来, 当 $q=0$, 由定理 2.4.8 结论显然成立. 对于 $q>0$, 由 q 的定义, $X_{q-1}\supset X_q$, 于是存在 $y\in X_{q-1}$, $y\notin X_q$. 由于 $y\in X_{q-1}$, 存在 $x\in X$ 使得 $y=(\lambda I-A)^{q-1}x$, 由于 $X_q=X_{q+1}, (\lambda I-A)y\in X_q=X_{q+1}$, 即存在 z, 使得

$$(\lambda I-A)y=(\lambda I-A)^{q+1}z.$$

由于 $y\notin X_q$, 有

$$(\lambda I-A)^{q-1}(x-(\lambda I-A)z)=y-(\lambda I-A)^q z\neq 0,$$

即 $(x-(\lambda I-A)z)\notin \mathcal{N}_{q-1}$. 但是

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)^q[x-(\lambda I-A)z]&=(\lambda I-A)^q x-(\lambda I-A)^{q+1}z\\&=(\lambda I-A)y-(\lambda I-A)y=0.\end{aligned}$$

由此 $q\leqslant p$. 结合前一部分的证明知 $q=p$. □

2.5.2 紧线性算子的谱分解

由定理 2.5.3、定理 2.5.5 和定理 2.5.6 可以得到空间 X 相关 λ 的分解.

定理 2.5.7 X 是一个 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, $\lambda\neq 0$, 那么 X 可以表示成如下的直接和:

$$X=\mathcal{N}(\lambda I-A)^r\dotplus\mathcal{R}(\lambda I-A)^r, \tag{2.5.15}$$

其中 $r=p=q$ 是 A 关于 λ 的指标. 进一步地, 令 $T\equiv\lambda I-A\big|_{\mathcal{R}(\lambda I-A)^r}$ (T 是 $\lambda I-A$ 在 $\mathcal{R}(\lambda I-A)^r$ 上的限制), 则 T 的逆算子有界.

证明 对于 $\forall x\in X$, 令 $z=(\lambda I-A)^r x$, $z\in X_r$, 根据 r 的定义, $X_r=X_{2r}$, $z\in X_{2r}$, 于是存在 $x_1\in X$, 使得 $z=(\lambda I-A)^{2r}x_1$, $x_0=(\lambda I-A)^r x_1$, $x_0\in X_r$, 且

$$(\lambda I-A)^r x_0=(\lambda I-A)^{2r}x_1=z=(\lambda I-A)^r x, \tag{2.5.16}$$

于是 $(\lambda I-A)^r(x-x_0)=0$, 即 x 可以写成 $\mathcal{N}(\lambda I-A)^r$ 和 $\mathcal{R}(\lambda I-A)^r$ 中两元素之和:

$$x=(x-x_0)+x_0, \tag{2.5.17}$$

其中 $x-x_0\in\mathcal{N}(\lambda I-A)^r$, $x_0\in X_r=\mathcal{R}(\lambda I-A)^r$. 下面证明分解的唯一性, 如果存在 $\bar{x}_0$, 使得

$$x=x-\bar{x}_0+\bar{x}_0,\ x-\bar{x}_0\in\mathcal{N}(\lambda I-A)^r,\ \bar{x}_0\in\mathcal{R}(\lambda I-A)^r.$$

令 $y_0 = x_0 - \bar{x}_0$, 由于 $\mathcal{R}(\lambda I - A)^r$ 是一个子空间, 于是存在 y 使得

$$y_0 = (\lambda I - A)^r y. \tag{2.5.18}$$

同时

$$y_0 = x - \bar{x}_0 - (x - x_0) \in \mathcal{N}(\lambda I - A)^r,$$

于是

$$(\lambda I - A)^r y_0 = 0.$$

结合 (2.5.18) 有

$$(\lambda I - A)^{2r} y = (\lambda I - A)^r y_0 = 0,$$

即 $y \in \mathcal{N}(\lambda I - A)^{2r}$. 根据 r 的定义, $\mathcal{N}(\lambda I - A)^{2r} = \mathcal{N}(\lambda I - A)^r$, 推出 $y \in \mathcal{N}(\lambda I - A)^r$, 即

$$y_0 = (\lambda I - A)^r y = 0.$$

于是 $x_0 = \bar{x}_0$, 唯一性得证.

T 的逆算子是有界的. 事实上, 因为 $\mathcal{R}(\lambda I - A)^r = \mathcal{R}(\lambda I - A)^{r+1}$, 知 T 是满射, 且 T 是一一的, 这是因为如果 $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)^r$, 且 $Ty = 0$, 则存在 x, 使得 $y = (\lambda I - A)^r x$, 且

$$x \in \mathcal{N}(\lambda I - A)^{r+1} = \mathcal{N}(\lambda I - A)^r,$$

即 $y = (\lambda I - A)^r x = 0$. 于是 T 是一一的, 逆算子存在, 由逆算子定理 1.2.23 以及 $\mathcal{R}(\lambda I - T)^r$ 是闭的, 可知逆算子有界. □

注 1 T 的逆算子有界也可采用类似于定理 2.4.7 中的方法证明 (2.4.10) 成立, 推出逆算子有界.

注 2 $X_1 = \mathcal{N}(\lambda I - A)^r$, $X_2 = \mathcal{R}(\lambda I - A)^r$, 则 $X = X_1 + X_2$, 且 $(\lambda I - A)(X_i) \subseteq X_i$, $A(X_i) \subset X_i \ (i = 1, 2)$, 即 X_i 是 A 的不变子空间 (X_1 和 X_2 是 X 的约化子空间). 如 $T_i \equiv A|_{X_i}$, 则

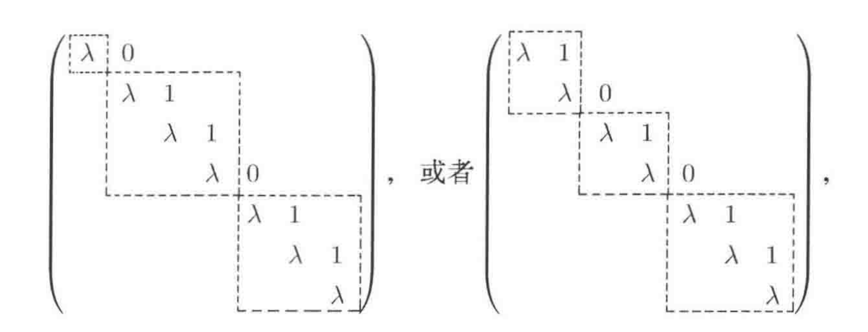
$$\sigma(A) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2),$$

且

$$\sigma(T_1) = \{\lambda\}, \quad \sigma(T_2) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}. \tag{2.5.19}$$

注 3 A 是紧的线性算子, 对于 A 的所有非零的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, 其代数维数为 $\dim \mathcal{N}(\lambda_j I - A)^{p_j} = m_j$, 几何维数为 $r_j \leqslant m_j \ (j = 1, 2, \cdots)$. A 限制在 $\mathcal{N}(\lambda_j I - A)^{p_j}$ 上是一个有限维空间上的线性算子, 可以化为若尔当(Jordan)标准型.

注 4 例: 如果 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^r = 7$, A 关于 λ 有三个线性无关的特征元素 (几何重数为 3), A 的指标 $r = p = q = 3$, Jordan 标准型可有以下两种不同的形式:



即这几个指标还不能完全确定 A 的性质.

定义 2.5.8 线性算子 D 称为是幂零的, 如果存在正整数 q , 使得 $D^q = 0$. 称使得 $D^q = 0$ 的最小的正整数 q 为 D 的指标.

如果 $\{\lambda_k\}$ 是紧线性算子 A 的非零特征值, 定理 2.5.7 中的 (2.5.15) 成立. 设 P_k 是在 $\mathcal{N}(\lambda_k I - A)^{r_k}$ 上的投影算子, 于是紧算子可以有如下分解:

$$AP_k = \lambda_k P_k + D_k, \tag{2.5.20}$$

其中 D_k 是幂零算子, 且 $P_k P_l = P_k \delta_{kl}$. 令 $Q_m = \sum_{k=1}^{m} P_k$, 那么

$$AQ_m = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k P_k + D_k). \tag{2.5.21}$$

2.5.3 Riesz-Schauder 定理

定理 2.5.9 A 是 Hilbert 空间 H 到 H 的紧的线性算子, $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值, 当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是 A^* 的特征值.

证明 由定理 2.2.7 $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, 推出 $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$, 由定理 1.6.21, A^* 是紧的, $\lambda \neq 0$, 推出 $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$. 反之亦然. □

定理 2.5.10 H 是 Hilbert 空间, A 是从 H 到 H 的紧线性算子, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\lambda \neq 0$, 那么

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A) = \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} - A^*). \tag{2.5.22}$$

证明 A 是紧的, 根据定理 1.6.21, A^* 也是紧的. 由定理 2.4.5, 对于 $\forall \lambda \neq 0$, $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A) < \infty$, $\dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty$, 不妨设 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A) \leqslant \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty$. 根据定理 2.4.7, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的, 再由定理 1.4.20 $\mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*) = \mathcal{R}(\lambda I - A)^{\perp}$, 于是存在从 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 到 $\mathcal{R}(\lambda I - A)^{\perp}$ 的等距映射 V. 令 P 为从 H 到 $\mathcal{N}(\lambda I - A)$ 的投影算子, P 是有穷秩的, 所以 P 是紧的. 考虑线性算子 $A_1 = A + VP$,

由于 A 是紧的, 所以 A_1 是紧的, 注意到 $\lambda I - A$ 和 V 的值域是相互正交的以及 V 是等距的, 我们有: $\mathcal{N}(\lambda I - A_1) = \{0\}$, 即 λ 不是 A_1 的特征值, 由定理 2.5.9, $\overline{\lambda}$ 也不是 A_1^* 的特征值, 即

$$\{0\} = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A_1^*) = \mathcal{R}(\lambda I - A_1)^\perp = (\mathcal{R}(\lambda I - A) \oplus \mathcal{R}(V))^\perp.$$

于是 $\mathcal{R}(\lambda I - A) \oplus \mathcal{R}(V) = H$, 因此 $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(\lambda I - A)^\perp$. 这样

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A) = \dim \mathcal{R}(V) = \dim \mathcal{R}(\lambda I - A)^\perp = \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*).$$ □

注 1 若 X 是 Banach 空间, 上述结论仍然成立, 即 $\lambda \neq 0$,

$$\dim \mathcal{N}(\lambda I - A) = \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A') < \infty.$$

证明可参阅 [15].

注 2 λ 是 A 的特征值, 则 $\overline{\lambda}$ 是 A^* 的特征值, 并且 λ 的几何维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)$ 和 $\overline{\lambda}$ 的几何维数 $\dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*)$ 相等, 同时结合 (2.4.8) 知 λ 的代数维数和 $\overline{\lambda}$ 的代数维数也相等.

综合本节的证明, 有以下定理

定理 2.5.11 X 是一个 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧线性算子, $\lambda \neq 0$, 则

(1) $\mathcal{N}(\lambda I - A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{R}(\lambda I - A) = X$;

(2) $\overline{\sigma(\lambda I - A)} = \sigma(\lambda I - A)^*$;

(3) $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A) = \dim \mathcal{N}(\lambda I - A)^* < \infty$;

(4) $\mathcal{R}(\lambda I - A) = [\mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*)]^\perp, \mathcal{R}(\overline{\lambda} I - A^*) = \mathcal{N}(\lambda I - A)^\perp$.

证明 (1) 由定理 2.5.6 $p = q = 0$ 可知.

(2) 根据定理 2.2.7 可证.

(3) 根据定理 2.5.10 可证.

(4) 由定理 1.4.20, $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = [\mathcal{N}(\lambda I - A)^*]^\perp$, 再根据定理 2.4.7, $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 是闭的, 第一个等式得证. 同样可证第二个等式. □

注 由 (3) 和 (4) 可知 $\lambda I - A$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ 的补维数等于 $\lambda I - A$ 零空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - A)$.

由 $\mathcal{R}(\lambda I - A) = [\mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*)]^\perp, \mathcal{R}(\overline{\lambda} I - A^*) = \mathcal{N}(\lambda I - A)^\perp$ 可知

定理 2.5.12 (Riesz-Schauder) A 是如上定义的紧线性算子, $\lambda \neq 0$.

(1) 方程

$$(A - \lambda I)x = y \tag{2.5.23}$$

有解, 当且仅当

$$y \in \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp;$$

(2) 方程

$$(A^* - \overline{\lambda})f = g \tag{2.5.24}$$

有解, 当且仅当 $g \in \mathcal{N}(\lambda I - A)^{\perp}$.

Riesz-Schauder 定理给出了有关代数方程组和积分方程求解的 Fredholm 抉择定理, 即求解方程 (2.5.23) 只有两种情况:

(1) 当 $\lambda \in \rho(A)$, 对于 $\forall y \in X$ 方程 (2.5.23) 存在唯一解;

(2) 或者是当 $y = 0$ 方程 (2.5.23) 有非零解时 (即 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$), 方程 (2.5.23) 有解当且仅当 y 与方程 $(A^* - \overline{\lambda})z = 0$ 的解空间正交.

即 (2.5.23) 有解, 当且仅当 $(y, z) = 0$, 对 $\forall z \in H$, 满足 $(\overline{\lambda} I - A^*)z = 0$. 对于方程 (2.5.24) 也有类似的结果.

习 题 2.5

1. 设 X 是 Banach 空间, T 是从 X 到 X 的有界线性算子, 并存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $X = \mathcal{N}(T^m) \dot{+} \mathcal{R}(T^m)$, 证明 $p(T) = q(T) \leqslant m$.

2. 设 X 是 Banach 空间, $A, B \in \mathfrak{B}(X)$, 且 $AB = BA$, 证明

(1) $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(A)$ 都是 B 的不变子空间;

(2) $\mathcal{R}(B^n)$ 和 $\mathcal{N}(B^n)$ 都是 B 的不变子空间 $(\forall n \in \mathbb{N})$.

3. 设 X 是 Banach 空间, A 是从 X 到 X 的紧算子. 证明当且仅当 $x - Ax = 0$ 只有零解时, 对 $\forall y \in X$, 方程 $x - Ax = y$ 都有解.

4. 考虑定义在 $l^2[1, \infty)$ 上的算子 $L = S_{\mathrm{r}} + S_{\mathrm{l}} + \Phi$, 这里 $S_{\mathrm{r}}, S_{\mathrm{l}}$ 是右移和左移算子, Φ 定义为

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = 2b\left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \cdots, \frac{1}{n}x_n, \cdots\right),$$

其中 $b > 0$.

(1) 证明 L 的特征值是 $\lambda_k = 2\left[1 + \left(\dfrac{b}{k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2, \cdots)$;

(2) 设 $\{\phi_k\}$ 是相应的特征元素, $\|\phi_k\|_2 = 1$. 证明 $\{\phi_k\}$ 不是 $l^2[1, \infty)$ 的基.

5. 求出 $y(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} k(t, \tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的特征值与特征元素. 这里

$$k(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt],$$

其中 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$.

6. 设 T: $l^2 \to l^2$ 定义为

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \mapsto Tx = (\xi_2, \xi_3, \cdots).$$

令 $m=m_0$ 和 $n=n_0$ 是使 $\mathcal{N}(T^m)=\mathcal{N}(T^{m+1})$ 和 $T^{n+1}(X)=T^n(X)$ 成立的最小数, 求 $\mathcal{N}(T^m)$. 问是否存在有限的 m_0? 求 n_0.

7. 如果赋范空间 X 上的线性算子 $T\colon X\to Y$ 具有有限维值域 $\mathcal{R}(T)=T(X)$, 证明 T 有形如

$$Tx=f_1(x)y_1+\cdots+f_n(x)y_n$$

的表达式, 这里 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 和 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 分别是 Y 和 X^*(X 的对偶空间) 中的线性无关集.

8. 在 $C[0,1]$ 中, 考虑映射

$$T\colon x(t)\to\int_0^t x(s)\mathrm{d}s,\quad \forall x(t)\in C[0,1].$$

(1) 证明 T 是紧算子;

(2) 求 $\sigma(T)$ 及 T 的一个非平凡的闭不变子空间.

§2.6 正常算子和自共轭算子的谱

2.6.1 正常线性算子的谱

正常的和自共轭的线性算子是 Hilbert 空间中十分重要的线性算子, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 空间上对称算子 (矩阵) 的推广. 由于自共轭线性算子的谱都是实的, 它们有着重要的应用背景.

定理 2.6.1 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, λ 是 T 的特征值, x 是对应于 λ 的特征元素. 则 $\overline{\lambda}$ 是 T 的共轭算子 T^* 的特征值, x 是对应于 $\overline{\lambda}$ 的特征元素, 并且

$$\mathcal{N}(\lambda I-T)=\mathcal{N}(\overline{\lambda}I-T^*).\tag{2.6.1}$$

证明 因为 T 是正常的, 当且仅当对于任意的 $x\in H$, $\|Tx\|=\|T^*x\|$. T 是正常的, 则 $\lambda I-T$ 也是正常的. 因此 $\|(\lambda I-T)x\|=0$ 当且仅当 $\|(\overline{\lambda}I-T^*)x\|=0$. □

定理 2.6.2 T 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, $\mu\neq\lambda$, 则零空间 $\mathcal{N}(\lambda I-T)$ 和 $\mathcal{N}(\mu I-T)$ 相互正交.

证明 令 $x\in\mathcal{N}(\lambda I-T)$, $y\in\mathcal{N}(\mu I-T)$, 由于 $(Tx,\ y)=(x,\ T^*y)$, 结合定理 2.6.1 有 $(\lambda x,\ y)=(x,\ \overline{\mu}y)$, 因此 $(\lambda-\mu)(x,\ y)=0$, 由于 $\mu\neq\lambda$, 所以 $(x,\ y)=0$. □

定理 2.6.3 正常算子的剩余谱是空集.

证明 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, 我们需要证明的是, 如果 $(\lambda I-T)$ 是一一的, 那么 $\lambda I-T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 H 中是稠密的.

设 λ 不是 T 的特征值, $y\in H$, 且 $y\perp\mathcal{R}(\lambda I-T)$, 即对于 $\forall x\in H$, $(\lambda x-Tx,\ y)=0$. 因为 $((\lambda I-T)x,\ y)=\big(x,\ (\overline{\lambda}-T^*)y\big)=0$ $(\forall x\in H)$, 所以 $y\in\mathcal{N}(\overline{\lambda}I-T^*)$. 由于

λ 不是 T 的特征值, 所以 $\overline{\lambda}$ 不是 T^* 的特征值, 于是 $y=0$, 即 $\mathcal{R}(\lambda I-T)^{\perp}=\{0\}$, 这意味着 $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 H 中稠密. □

定理 2.6.4 一个复数 λ 属于正常算子 T 的谱集合的充分必要条件是存在一个点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\|=1$, 且 $\|(\lambda I-T)x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$.

证明 必要性. 假如不然, 则存在逆算子, 且逆算子有界. 又因为 T 是正常的, 由定理 2.6.3, $\mathcal{R}(\lambda I-T)$ 在 H 中稠, 于是有 $\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.

充分性. 当 λ 是特征值, 命题成立. 若 λ 不是特征值, 逆算子存在, 令 $y_n=(\lambda I-T)x_n$, 即

$$x_n=(\lambda I-T)^{-1}y_n.$$

若 $\lambda\in\rho(T)$, 则 $(\lambda I-T)^{-1}$ 有界, $\exists M>0$, 使得

$$\|x_n\|=\left\|(\lambda I-T)^{-1}y_n\right\|\leqslant M\|y_n\|,$$

由于左边趋近于 1, 而右边趋近于零, 矛盾. □

注 1 定理 2.6.4 的证明中没有使用近似点谱的概念. 根据定理 2.2.10 可知, 如果 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)=\varnothing$, 那么 $\sigma_{\mathrm{a}}(T)=\sigma(T)$. 即对于正常算子来说, 由定理 2.6.3 可知, $\sigma_{\mathrm{a}}(T)=\sigma(T)$, 由近似点谱的定义立即可以得到定理 2.6.4 的结论.

注 2 当 T 是正常算子时, 若 $\lambda\in\sigma(T)$, 但 λ 不是特征值, 则 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)$.

定理 2.6.5 T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 中正常的有界线性算子, 则 $\overline{\mathcal{R}(T)}$ 和 $\mathcal{N}(T)$ 互为正交补, 即

$$H=\overline{\mathcal{R}(T)}\oplus\mathcal{N}(T).\tag{2.6.2}$$

证明 因为 $\mathcal{N}(T)$ 是闭的, 根据定理 1.1.33, $H=\mathcal{N}(T)\oplus\mathcal{N}(T)^{\perp}$, 由定理 2.6.1, $\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}(T^*)$, 所以 $\mathcal{N}(T)^{\perp}=\mathcal{N}(T^*)^{\perp}=\overline{\mathcal{R}(T)}$, 定理得证. □

定理 2.6.6 如果 T 是正常算子, 则 T 的零链长等于 0 或者 1.

证明 如果 $x\in\mathcal{N}(T^2)$, 那么, $Tx\in\mathcal{R}(T)\cap\mathcal{N}(T)$, 由定理 2.6.5, $\mathcal{R}(T)\cap\mathcal{N}(T)=\{0\}$, 因此 $Tx=0$, 即 $\mathcal{N}(T^2)=\mathcal{N}(T)$, 即 T 的零链长不超过 1. □

注 正常算子特征值 λ 的代数重数和几何重数相等.

2.6.2 有界自共轭算子的谱

定理 2.6.7 有界自共轭算子 T 的谱是实数集合的一个子集合 , 且

$$\sigma(T)\subset[-\|T\|,\|T\|].\tag{2.6.3}$$

证明 令 $\lambda=\rho+\mathrm{i}\sigma\ (\sigma\neq 0)$,

$$\|(\lambda I-T)x\|^2=(\rho x-Tx,\rho x-Tx)+(\mathrm{i}\sigma x,\mathrm{i}\sigma x)\geqslant|\sigma|^2\|x\|^2.\tag{2.6.4}$$

因此 $\lambda I - T$ 是下方有界的, 由定理 2.6.4 知, $\lambda \in \rho(T)$, 由此可知 T 的谱是实的, 结合定理 2.2.2 可知 $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$. □

注 根据定理 2.6.2、定理 2.6.3 和定理 2.6.7 可知, 若 T 是一个自共轭算子, 则

(1) $\sigma(\lambda) \subset \mathbb{R}$;

(2) $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \varnothing$;

(3) 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

由定理 1.5.7, 如果 T 是 Hilbert 空间上的有界自共轭线性算子, 则对于 $\forall x \in H$, (Tx, x) 是实的. 对于 T 的谱的分布, 我们可以有以下更精确的估计.

定理 2.6.8 T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 令

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Tx, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1}(Tx, x), \tag{2.6.5}$$

则

$$\sigma(T) \subset [m, M]. \tag{2.6.6}$$

证明 因为 T 是自共轭算子, $\sigma(T)$ 是在实轴上. 下面证明对任意的实数 $c > 0$, $\lambda = M + c \in \rho(T)$. 对于 $\forall x \in H, x \neq 0$, 令 $v = \dfrac{x}{\|x\|}$,

$$(Tx, x) = \|x\|^2 (Tv, v) \leqslant \|x\|^2 \sup_{\|u\|=1}(Tu, u) = (x, x)M,$$

因此

$$\|(\lambda I - T)x\| \|x\| \geqslant ((\lambda I - T)x, x) = \lambda(x, x) - (Tx, x) \geqslant (\lambda - M)(x, x) = c\|x\|^2,$$

其中 $c = \lambda - M > 0$. 根据定理 2.6.4, $\lambda \in \rho(T)$. 对于 $\lambda < m$, 可以用类似的方法证明 $\lambda \in \rho(T)$. □

定理 2.6.9 T 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1}|(Tx, x)|. \tag{2.6.7}$$

证明 由 Schwarz 不等式有

$$\sup_{\|x\|=1}|(Tx, x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \|x\| = \|T\|,$$

令 $k = \sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx, x)|$, 只需证明 $\|T\| \leqslant k$. 由于 T 是自共轭的, 对于 $x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1$, 运用平行四边形法则 (定理 1.1.27), 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(Tx, y) &= \frac{1}{4}[(T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y))] \\
&\leqslant \frac{1}{4}k[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = k.
\end{aligned}$$

取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, 使得

$$\overline{\alpha}(Tx, y) = |(Tx, y)|,$$

则

$$|(Tx, y)| = (Tx, \alpha y) = \text{Re}(Tx, \alpha y) \leqslant k.$$

由定理 1.5.8 推出 $\|T\| \leqslant k$. □

结合定理 2.2.17 可知

推论 2.6.10 T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, 则

$$\sup\{|\lambda| \,|\lambda \in \sigma(T)\} = r_\sigma(T) = \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|. \tag{2.6.8}$$

定理 2.6.11 T 是 Hilbert 空间 H 到 H 的有界自共轭线性算子, m, M 同定理 2.6.8, 则

$$m \in \sigma(T), \quad M \in \sigma(T). \tag{2.6.9}$$

证明 对于 $c > 0$, 算子 $T + cI$ 相应的 m, M 以及 $\sigma(T)$ 都向右平移 c, 因此不妨设 $0 \leqslant m \leqslant M$. 由定理 2.6.9, $\|T\| = M$, 根据 M 的定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset H, \|x_n\| = 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 且 $(Tx_n, x_n) \to M \ (n \to \infty)$, 于是

$$\begin{aligned}
&\|Tx_n - Mx_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\
= &\|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2 \|x_n\|^2 \leqslant 2M^2 - 2M(Tx_n, x_n) \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

由定理 2.6.4 $M \in \sigma(T)$. 类似地, 可以证明 $m \in \sigma(T)$.

注 由推论 2.6.10, 结合 $\sigma(T)$ 是闭的 (定理 2.2.3 注 1), 也可以证明定理 2.6.11.

更一般地, 为了研究谱的分布, 引入数值域的概念.

定义 2.6.12 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, 令

$$W(T) = \{(Tx, x) |\, \|x\| = 1\}, \tag{2.6.10}$$

$W(T)$ 称为 T 的数值域.

定理 2.6.13 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$, 则

(1) $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$;

(2) 如果 $d(\lambda, \overline{W(T)}) = d > 0$, 则 $\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{d}$.

证明 设 $\lambda \notin \overline{W(T)}$, 则 $d(\lambda, \overline{W(T)}) = d > 0$. 对于 $\forall x \in H, \|x\| = 1$, 由 Schwarz 不等式

$$d \leqslant |\lambda - (Tx, x)| = |(\lambda x - Tx, x)| \leqslant \|\lambda x - Tx\|,$$

由定理 1.2.18 $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在 (定义域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 是闭的), 且 $\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{d}$.

于是 $\lambda \in \rho(T)$, 或者 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. 如果 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$, 那么 $\mathcal{R}(\lambda I - T)^{\perp} \neq \{0\}$, 由于 $\mathcal{R}(\lambda I - T)^{\perp} = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*)$, $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值, 令 x 为 T^* 关于 $\overline{\lambda}$ 的特征元素, $\|x\| = 1$, $T^*x = \overline{\lambda}x$, 那么 $(Tx, x) = (x, T^*x) = \lambda(x, x) = \lambda$, 于是 $\lambda \in W(T)$, 矛盾. 于是 λ 属于 T 的正则集 $\rho(T)$, 定理得证. □

注 可以证明 $W(T)$ 是一个凸集. 当 T 是正常算子时, $\overline{W(T)}$ 是包含 $\sigma(T)$ 的最小的闭的凸包 (参阅定理 4.2.5 和定理 4.2.6).

显然当 T 是自共轭算子时, 定理 2.6.8 是定理 2.6.13 的特殊情况.

2.6.3 紧的正常算子的谱分解

紧的正常算子的谱分解有着十分简明的形式, 它从结构上刻画了紧算子的基本性质.

定理 2.6.14 (紧的正常算子的谱分解) 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是紧的正常算子, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 是 T 的非零特征值, P_i 是对应的特征元素空间上的正交投影算子 (有穷秩的), 则 $T = \sum_i \lambda_i P_i$, 在 $\mathfrak{B}(H)$ 中按范数收敛.

证明 令 $M = \operatorname{span}\{\mathcal{R}(P_i),\ i = 1, 2, \cdots\}$, P 是在 $M^{\perp}$ 上的正交投影. 如果 $M^{\perp} \neq \{0\}$, 则对于任何 $x \in M^{\perp}$, $y \in H$, 有

$$(Tx, P_i y) = (x, T^* P_i y) = \lambda_i (x, P_i y) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

所以 $Tx \in M^{\perp}$, 即 $TM^{\perp} \subset M^{\perp}$. 同理可以证明 $T^*M^{\perp} \subset M^{\perp}$. 令 $S = T|_{M^{\perp}}$, S 在 $M^{\perp}$ 上是正常的, S 的特征值是 T 的特征值, S 的特征元素是 T 包含在 $M^{\perp}$ 中的特征元素, 由 M 的定义 (包含了 T 所有的非零特征值), S 可能有的特征值只有零. 由紧算子谱的结构, $\sigma(S) = \{0\}$, 由定理 2.2.13, 谱半径 $r_\sigma(s) = 0$, 再根据定理 2.2.17,

$$\|S\| = r_\sigma(S) = 0, \tag{2.6.11}$$

即 S 是零算子, 这就是说 T 在 $M^{\perp}$ 为零算子. 于是对于 $\forall x \in H$,

$$Tx = TPx + T\sum_i P_i x = \sum_i TP_i x = \sum_i \lambda_i P_i x. \tag{2.6.12}$$

如果 $\{\lambda_i\}$ 是无穷列, 对于 $\forall x \in H$, $\|x\| = 1$ 和 $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\|\left(T - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i\right)x\right\|^2 &= \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \|P_i x\|^2 \\ &\leqslant \sup\left\{|\lambda_i|^2 \mid i \geqslant m+1\right\}\|x\|^2 = \sup\left\{|\lambda_i|^2 | i \geqslant m+1\right\}.\end{aligned}$$

因为 $\lambda_i \to 0$, 所以 $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ 按范数收敛. □

注 1 定理 2.6.14 说明紧的正常算子可以表示成有穷秩的正交投影算子的加权和, 类似于有限维空间中对称算子的对角化, 并且级数的收敛是按范数收敛的. (对比定义 2.3.4, 其收敛是强收敛.)

注 2 反之, 如果 $\lambda_i \to 0$ (或者仅有有限个 λ_i), $\lambda_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$, P_i 是有穷秩的非零正交投影, $P_iP_j = 0\ (i \neq j)$, 那么

$$T = \sum_i \lambda_i P_i$$

在 $\mathfrak{B}(H)$ 中收敛, 并且由定理 2.3.15 和定理 2.3.17 推知, T 是紧的正常算子. 根据引理 2.3.10, $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\}$ 是 T 的非零特征值, $\mathcal{R}(P_i)$ 是对应的特征空间. 如果 λ_i 都是实的, 由定理 2.3.16, T 是自共轭的.

定理 2.6.15 (Hilbert-Schmidt 展开定理) 若 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧的正常算子, 则存在 μ_j ($\mu_j \to 0$) (或者 μ_j 只有有限个), 和一个在 H 中正交的点列 $\{e_j\}$, 使得

$$Tx = \sum_j \mu_j (x, e_j) e_j, \quad \forall x \in H. \tag{2.6.13}$$

相反地, 由上式定义的算子 T 是紧的、正常的, μ_j 是 T 的特征值, e_j 是对应的特征元素.

当 T 是自共轭的, 以上结论对一个实的 Hilbert 空间也成立.

证明 由定理 2.6.14, 可令 $T = \sum\limits_i \lambda_i P_i$, 对于每一个 i, $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m}\}$ 是 $\mathcal{R}(P_i)$ 的正交基, 令 $\mu_{i_k} = \lambda_i\ (i_k = i_1, \cdots, i_m)$,

$$Tx = \sum_i \lambda_i P_i x = \sum_i \lambda_i \sum_k P_i(x, e_{i_k}) e_{i_k} = \sum_i \sum_k \mu_{i_k} (x, e_{i_k}) e_{i_k}.$$

经重新排序可得以上结论. 相反地, 可以由定理 2.3.15 和定理 2.3.17 证明. 关于自共轭算子的结论可由定理 2.3.16 给出. □

定理 2.6.16 令 T 是一个紧的正常算子, $\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值 (按照重数计数), 且 $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $|\lambda_1| = \|T\|$, 且对于 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda_{n+1}| = \inf_{y_1, \cdots, y_n \in H} \sup \{\|Tx\| \mid x \perp y_1, \cdots, y_n, \|x\| = 1\}. \tag{2.6.14}$$

如果 T 是自共轭的, 以上结论在实的 Hilbert 空间也成立.

证明 由于 T 是正常的, 谱半径 $r_\sigma = \|T\|$, 由 T 是紧的, $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T)\backslash\{0\}$, 得到 $|\lambda_1| = \|T\|$.

令 $\{x_j\}$ 是正交列, $\|x_j\|=1$, 使得 $Tx_j=\lambda_j x_j$. 选择 $y_j=x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$, 那么对于任意的 $x\perp y_1,y_2,\cdots,y_n$, $\|x\|=1$, 有

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&=\left\|\sum_{j>n}\lambda_j(x,\ x_j)\,x_j\right\|^2=\sum_{j>n}|\lambda_j|^2\,|(x,x_j)|^2\\&\leqslant|\lambda_{n+1}|^2\sum_{j>n}|(x,\ x_j)|^2\leqslant|\lambda_{n+1}|^2\,\|x\|^2=|\lambda_{n+1}|^2,\end{aligned}\tag{2.6.15}$$

所以

$$|\lambda_{n+1}|\geqslant\inf_{y_1,\cdots,y_n\in H}\sup\{\|Tx\|\mid x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\}.$$

对于任意的 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, 令 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的非零线性组合, $x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{n+1}x_{n+1}$, $\|x\|=1$, 其中系数 a_i 由如下方程组确定,

$$\left\{\begin{array}{c}a_1(x_1,\ y_1)+a_2(x_2,\ y_1)+\cdots+a_{n+1}(x_{n+1},\ y_1)=0,\\a_1(x_1,\ y_2)+a_2(x_2,\ y_2)+\cdots+a_{n+1}(x_{n+1},\ y_2)=0,\\\cdots\cdots\\a_1(x_1,\ y_n)+a_2(x_2,\ y_n)+\cdots+a_{n+1}(x_{n+1},\ y_n)=0,\end{array}\right.$$

即 $x\perp\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$. 由于

$$\|Tx\|^2=\left\|\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x,x_j)x_j\right\|^2=\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j|^2\,|(x,x_j)|^2\geqslant|\lambda_{n+1}|^2\,\|x\|^2=|\lambda_{n+1}|^2,$$

有

$$|\lambda_{n+1}|\leqslant\inf_{y_1,\cdots,y_n\in H}\sup\{\|Tx\|\mid x\perp y_1,\cdots,y_n,\ \|x\|=1\}.\tag{2.6.16}$$

结合 (2.6.15) 和 (2.6.16), 定理得证. □

推论 2.6.17 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧的自共轭算子, 那么 T 有一个实特征值 λ, 使得 $|\lambda|=\|T\|$.

2.6.4 极大极小原理

对于紧的自共轭算子 A, 由于 $\|A\|=\sup\{(Ax,x)\,|\,\|x\|=1\}$, 并且 A 的不同的特征值所对应的特征元素相互正交, 使用类似定理 2.6.16 的证明方法, 有

$$|\lambda_n|=\sup\{|(Ax,x)|\,|\,x\perp\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_{n-1}\},\|x\|=1\},\tag{2.6.17}$$

其中 $e_1,\cdots,e_{n-1}$ 是对应于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ 规范的特征元素.

进一步地, 如果我们按正负值把特征值排列起来, 记作

$$\lambda_1^+\geqslant\lambda_2^+\geqslant\cdots\geqslant0,\quad\lambda_1^-\leqslant\lambda_2^-\leqslant\cdots<0.\tag{2.6.18}$$

定理 2.6.18(极大极小原理) 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的紧自共轭算子, 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x\in E_{n-1}^{\perp}} \{(Ax,x) \,|\, \|x\|=1\}, \tag{2.6.19}$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x\in E_{n-1}^{\perp}} \{(Ax,x) \,|\, \|x\|=1\}, \tag{2.6.20}$$

其中 E_{n-1} 是 H 中的任意 $n-1$ 维闭的线性子空间.

证明 注意到

$$x = \sum \alpha_i^+ e_i^+ + \sum \alpha_j^- e_j^-,$$

则对于 $\forall x \in H$, $\|x\|=1$,

$$(Ax,x) = \sum \lambda_i^+ \left|\alpha_i^+\right|^2 + \sum \lambda_j^- \left|\alpha_j^-\right|^2.$$

令 $\mu_n = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\left\{(Ax,x) \,|\, \|x\|=1,\, x\in E_{n-1}^{\perp}\right\}$. 对于 $\forall E_{n-1}$, 在 $\operatorname{span}\left\{e_1^+,\cdots,e_n^+\right\}$ 中总有向量 $x_n \neq 0$, $\|x_n\|=1$, 使得 $x_n \perp E_{n-1}$, 于是

$$\sup_{x\perp E_{n-1}} (Ax,x) \geqslant (Ax_n,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^+ \left|\alpha_i^+\right|^2 \geqslant \lambda_n^+,$$

即 $\mu_n \geqslant \lambda_n^+$. 反之, 取 $E_{n-1} = \operatorname{span}\left\{e_1^+,\cdots,e_{n-1}^+\right\}$, 则对于 $\forall x\in H$, $\|x\|=1$, 有

$$\lambda_n^+ = \sup_{x\perp E_{n-1}} (Ax,x),$$

即 $\lambda_n^+ \geqslant \mu_n$. 于是 $\lambda_n^+ = \mu_n = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\left\{(Ax,x) \,|\, \|x\|=1,\ x\in E_{n-1}^{\perp}\right\}$.

用 $-A$ 代替 A 可证 (2.6.20). □

2.6.5 笛卡儿分解

若 T 是 Hilbert 空间上的正常算子, 由笛卡儿分解 (定理 1.5.16), 我们知道, 存在可以交换的自共轭算子 A 和 B, 使得 $T=A+\mathrm{i}B$, $T^*=A-\mathrm{i}B$, 且

$$\max\{\|A\|,\|B\|\} \leqslant \|T\| = \|T^*\|, \quad \|T\|^2 \leqslant \|A\|^2+\|B\|^2.$$

定理 2.6.19 T 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, $T=A+\mathrm{i}B$ 是 T 的笛卡儿分解, 则 T 是紧的充要条件是 A 和 B 都是紧的.

证明

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= ((A+\mathrm{i}B)x,(A+\mathrm{i}B)x)\\ &= \|Ax\|^2 - \mathrm{i}(Ax,Bx) + \mathrm{i}(Bx,Ax) + \|Bx\|^2\\ &= \|Ax\|^2 - \mathrm{i}(BAx,x) + \mathrm{i}(ABx,x) + \|Bx\|^2\\ &= \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2,\end{aligned}$$

由此可知 $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 列的充要条件是 $\{Ax_n\}, \{Bx_n\}$ 是 Cauchy 列, 即 T 是紧的充要条件是 A、B 是紧的. □

注 由 $T^* = A - \mathrm{i}B$ 可知, T 是紧的充要条件是 T^* 是紧的.

以下考虑 A, B 的特征值和 T 的特征值的关系. 令 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 是 T 的特征值, $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值, 根据定理 2.6.1, x 是它们的特征元素, $Tx = \lambda x$, $T^*x = \overline{\lambda}x$.

$$Ax = \frac{1}{2}(T + T^*)x = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})x = \alpha x, \tag{2.6.21}$$

$$Bx = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*)x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\lambda - \overline{\lambda})x = \beta x. \tag{2.6.22}$$

所以

$$\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) \subset \mathcal{N}(\alpha I - A),$$
$$\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) \subset \mathcal{N}(\beta I - B).$$

反之, T 是紧的正常的算子, α 是 A 的非零特征值, $x \in \mathcal{N}(\alpha I - A)$,

$$(\alpha I - A)Bx = B(\alpha I - A)x = 0,$$

即 B 把 $\mathcal{N}(\alpha I - A)$ 映到 $\mathcal{N}(\alpha I - A)$ 中, B 在 $\mathcal{N}(\alpha I - A)$ 上是紧的自共轭的. 由于 $\mathcal{N}(\alpha I - A)$ 是有限维的, 所以在 $\mathcal{N}(\alpha I - A)$ 中存在以 B 的特征元素组成的正交基 $e_1, \cdots, e_n$, B 在 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下是对角矩阵, 即

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

以下证明 $\alpha + \mathrm{i}\beta_1, \cdots, \alpha + \mathrm{i}\beta_n$ 是 T 的特征值. 因为对于 $\forall e_j$, $Be_j = \beta_j e_j$, 于是

$$Te_j = (A + \mathrm{i}B)e_j = Ae_j + \mathrm{i}Be_j = \alpha e_j + \mathrm{i}\beta_j e_j = (\alpha + \mathrm{i}\beta_j)e_j.$$

同样, 从 B 的非零特征值 β 开始, 则 A 是 $\mathcal{N}(\beta I - B)$ 上的紧的自共轭算子, 同样在 $\mathcal{N}(\beta I - B)$ 上构造一个正交基, A 在这组基下是对角型, 即

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_m \end{pmatrix},$$

于是有 $\alpha_1 + \mathrm{i}\beta$, $\alpha_2 + \mathrm{i}\beta$, $\cdots$, $\alpha_m + \mathrm{i}\beta$ 是 T 的特征值. 且

$$\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\alpha I - A) \cap \mathcal{N}(\beta I - B), \tag{2.6.23}$$

其中 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ (图 2.6.1). □

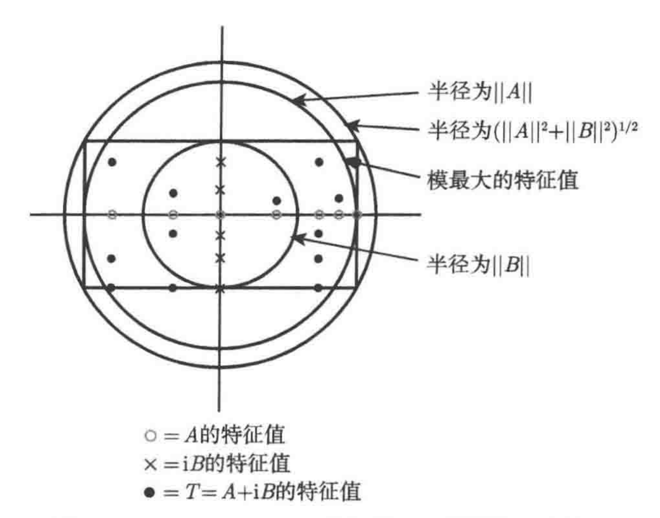


图 2.6.1　$T = A + \mathrm{i}B$ 的特征值, T 是紧的正常算子

习　题　2.6

1. (1) 构造一个紧正常算子 $T = A + \mathrm{i}B$, 使得 T 至少有一个特征值 λ 满足 $|\lambda|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$;

(2) 构造一个紧正常算子 $T = A + \mathrm{i}B$, 使得任一特征值 λ 都满足 $|\lambda|^2 < \|A\|^2 + \|B\|^2$, 并计算谱半径 $r_\sigma(T)$ 及 $\|T\|$;

(3) 构造一个紧正常 (非自伴) 算子 $T = A+\mathrm{i}B$, 使得任一特征值 λ 都满足 $|\lambda| \leqslant \max(\|A\|, \|B\|)$.

2. 设 $T = A + \mathrm{i}B$ 是紧正常算子, 在什么情况下 $\|T\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$?

3. 设 T 是紧的自共轭算子, $n \in \mathbb{N}$ 是奇数, 则仅存在唯一紧自共轭算子 A, 使得 $A^n = T$.

4. 设 L, M 是 Hilbert 空间 H 上的两个紧的正常算子, 并且 $LM = ML$. 证明适当选择 $\{\lambda_n\}$ 及 $\{\mu_n\}$, 存在单位分解 $\{P_n\}$, 使得 $L = \sum\limits_n \lambda_n P_n$, $M = \sum\limits_n \mu_n P_n$.

5. 设 $\{L_1, \cdots, L_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 上紧的正常算子集, 且满足 $L_iL_j = L_jL_i$, $\forall i, j$. 证明存在恒等分解 $\{P_n\}$ 使得 $L_i = \sum\limits_n \lambda_n^{(i)} P_n$ $(i = 1, \cdots, k)$, 这里 $\{\lambda_n^{(i)}\}$ 依赖于 L_i.

6. 考虑方程 $(\lambda I - T)x = y$, 这里 T 是紧的正常算子, 设 $\{e_n\}$ 是 T 的与特征值 $\{\lambda_n\}$ 相对应的特征元素构成的标准正交基, 假定 $\lambda \neq 0$. 证明

(1) 若 λ 不是 T 的特征值, 则对 $\forall y \in H$, $(\lambda \mathrm{I} - T)x = y$ 存在一个解 x,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n;$$

(2) 若 λ 是 T 的特征值, 则 $(\lambda I - T)x = y$ 有解, 当且仅当 $y \perp \mathcal{N}(\lambda I - T)$. 若 $y \perp \mathcal{N}(\lambda I - T)$, 则解 $x^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(y, e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n$, 其中由于 $(y, e_n) = 0$, 故包含在 $\mathcal{N}(\lambda \mathrm{I} - T)$ 中的特征元

素项除外.

7. 试给出这样的紧自共轭线性算子 $T\colon l^2 \to l^2$ 的例子, 它具有纯点谱, 并使得非零特征元素的集合

(1) 是一有限点集;

(2) 是一无限点集, 而且对应的特征元素构成 l^2 中之一稠密集;

(3) 是一无限点集, 而且对应的特征元素生成 l^2 中这样的子空间, 使得该子空间的闭包的正交补是有限维的;

(4) 与 (3) 中的一样, 但正交补是无限维的.

在每一情形试求由特征元素组成的完全的标准正交集.

8. 设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathfrak{B}(H)$ 是自共轭算子. 证明 $T \geqslant 0$ 当且仅当 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

9. 设 N 是复 Hilbert 空间 H 中的有界线性算子.

(1) 证明 N 是正常算子的充要条件是存在 H 中酉算子 U 及非负的自共轭算子 R , U 和 R 可交换, 使得 $N = UR$;

(2) 当 N 是正常算子时, 上述的分解式 $N = UR$ 是否唯一?

10. 设 N 是复 Hilbert 空间 H 上的有界正常算子, N_1 和 N_2 分别是 N 的实部和虚部. 证明

(1) $\|N\|^2 = \left\|N_1^2 + N_2^2\right\|$;

(2) 当 n 是自然数时, $\|N^n\| = \|N\|^n$;

(3) 当 $\lambda \in \rho(N)$ 时, $\left\|(\lambda I - N)^{-1}\right\| = \dfrac{1}{\min\limits_{z \in \sigma(N)} |\lambda - z|}$.

11. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上紧的自共轭算子, 并设 $T = \sum\limits_n \lambda_n P_n$ 是 T 的谱分解, 非零特征值 $\{\lambda_n\}$ 可被分成两个集合 $\wedge_+$ 和 $\wedge_-$, 即正的和负的特征值. 算子 $T_+ = \sum\limits_{\lambda_n \in \wedge_+} \lambda_n P_n$, $T_- = -\sum\limits_{\lambda_n \in \wedge_-} \lambda_n P_n$ 被称为是 T 的正、负部. 证明

(1) $T = T_+ - T_-$;

(2) $(T_+ x, x) \geqslant 0, (T_- x, x) \geqslant 0, \forall x \in H$;

(3) $T_+ T_- = T_- T_+ = 0$;

(4) 设 $|T| = T_+ + T_-$, 则 $T \leqslant |T|$, $-T \leqslant |T|$.

12. 设 $k(t, s) \in L^2(I \times I)$, 定义 $y = Kx$,

$$y(t) = \int_I k(t, s) x(s) \mathrm{d}s,$$

其中 $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$.

(1) 证明 K 是 $L^2(I)$ 上紧的自伴算子, $\|K\| \leqslant \|k\|_2$;

(2) 设 $\{e_n(t)\}$ 是 K 的与特征值 $\{\mu_n\}$ 相对应的特征元素组成的标准正交基. 假定 $|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \cdots$. 证明 $k(t, s) = \sum\limits_n \mu_n e_n(t) \overline{e_n(s)}$ 在 $L^2(I \times I)$ 中收敛;

(3) 证明 $\|k\|_2 = \left(\int_I \int_I |k(t, s)|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} = \sum\limits_n |\mu_n|^2$;

(4) 证明 $\|K\| = |\mu_1|$.

13. (接第 12 题) 假定 I 是闭的、有界的, $k(t,s)$ 关于 t,s 连续. 若算子 K 是正的, $k(t,s)$ 是实值的, 证明

(1) 若 μ_n 是非零特征值, 则存在与它相应的连续的实值特征函数 $e_n(t)$;

(2) 设 $k_N(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n e_n(t) e_n(s)$, $h_N(t,s) = k(t,s) - k_N(t,s)$. 证明 $h_N(t,t) \geqslant 0, \forall t \in I$;

(3) 存在 M, 使得对所有 t 及 N 有 $k_N(t,t) \leqslant k(t,t) \leqslant M$;

(4) 对每个固定的 t,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} \mu_i e_i(t) e_i(s)\right|^2 \leqslant M \sum_{i=m}^{n} \mu_i e_i(t)^2 \to 0 \quad (m,n\to\infty)$$

关于 s 一致地收敛;

(5) 级数 $k(t,s) = \sum\limits_{n} \mu_n e_n(t) \overline{e_n(s)}$ 逐点收敛;

(6) 级数 $k(t,s) = \sum\limits_{n} \mu_n e_n(t) \overline{e_n(s)}$ 关于 t 和 s 一致收敛.

§2.7 有界自共轭算子的谱分解

2.7.1 谱族

从定理 2.6.14 和定理 2.6.15 可以看到, 在 Hilbert 空间中, 紧的自共轭算子 T 可以有谱分解

$$T = \sum_i \lambda_i P_i, \tag{2.7.1}$$

即 T 可以表示成投影算子的加权和, 且算子级数是按范数收敛的, 其中 λ_i 是 T 的特征值 (i 至多可数, λ_i 是实数), P_i 是对应的特征元素空间上的正交投影算子. 由定理 2.6.8 可知, 存在 m, M, 使得 $\{\lambda_i\} \subset [m, M]$, 且

$$Tx = \sum_i \lambda_i P_i x. \tag{2.7.2}$$

在这一节里, 我们研究一般有界自共轭算子的谱分解, 把以上关于紧的自共轭算子的结果加以"适当推广". 由于自共轭算子的谱集合不仅仅包括离散的特征值, 还可以有连续谱, 我们需要把离散的 Hilbert-Schmidt 定理 2.6.15 加以连续化 (参阅定理 2.7.5). 为此我们引进有界自共轭算子的谱族 (算子值谱测度) 的概念. 首先在 $\{\lambda_i\}$ 是有限集时, 即

$$m = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k = M,$$

定义

$$E_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda < \lambda_1 = m, \\ P_1, & \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2), \\ P_1 + P_2, & \lambda \in [\lambda_2, \lambda_3), \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_1 + P_2 + \cdots + P_{k-1}, & \lambda \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k), \\ P_1 + P_2 + \cdots + P_k = I, & \lambda \geqslant \lambda_k = M. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

容易验证 E_λ 是 H 上的一个单参数的正交投影算子族, 称为关于 T 的谱族.

粗略地说, 当 λ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上增加时, 投影算子 E_λ 从 0 增加到 I, 并且增加只发生在 T 的特征值处, 在没有特征值的区间内, E_λ 保持不变, 如果 $\lambda < \mu$,

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda, \tag{2.7.4}$$

且

$$\lim_{\varepsilon \to +0} E_{\lambda+\varepsilon} = E_\lambda, \tag{2.7.5}$$

即 E_λ 是右连续的, $\lambda < m$ 时, $E_\lambda = 0$, $\lambda \geqslant M$ 时, $E_\lambda = I$.

还可以把投影算子的加权和 (2.7.1) 理解为以下意义的谱积分, 在区间 $(m, M]$ 上作一个分划 $\varDelta$,

$$\varDelta\colon\ m = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_{n-1} < \mu_n = M.$$

容易验证

$$\Delta E_k = E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}} = \sum_{\lambda_i \in (\mu_{k-1}, \mu_k]} P_i.$$

作相应的积分和式

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Delta E_k, \tag{2.7.6}$$

其中 $\xi_k \in (\mu_{k-1}, \mu_k]$, 当 $\|\varDelta\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (\mu_k - \mu_{k-1}) \to 0$ 时, 有

$$\lim_{\|\varDelta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_k \Delta E_k = \sum_i \lambda_i P_i = T,$$

注意到 (2.7.3), 把上式的左边记为谱积分, 即

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda. \tag{2.7.7}$$

对于一般的紧的自共轭算子 T, $\{\lambda_i\}$ 不是有限集, 可令 T 的谱族 E_λ 为

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_i \leqslant \lambda} P_i,$$

则类似地可以证明 $\{E_\lambda\}$ 满足 (2.7.4)、(2.7.5), 在按范数收敛的意义下, 积分和式 (2.7.6) 收敛, 即同样有

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda.$$

定义 2.7.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, 考虑从实数 $\mathbb{R}$ 到 $\mathfrak{B}(H)$ 的映射 $\lambda \mapsto E_\lambda$, 对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ 是正交投影算子且

(1) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda \ (\lambda < \mu)$(单调性);

(2) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0$;

(3) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x$;

(4) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} E_{\lambda+\varepsilon} x = E_\lambda x$ (右连续),

则 $\{E_\lambda\}$ 称为 Hilbert 空间 H 上的实的谱族.

注 1 如果 $\lambda < a$ 时, $E_\lambda = 0$, $\lambda \geqslant b$ 时, $E_\lambda = I$, 称 $\{E_\lambda\}$ 为区间 $[a, b]$ 上的谱族.

注 2 性质 (4) 不是本质的, 它保证算子谱分解的唯一性, 可以用左连续来代替右连续, 相应结论的右极限改为左极限即可.

例 2.7.2 令 $\rho(t)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的右连续的、非减的函数, 令

$$E_{\rho,t} x = \chi_{(-\infty, \rho(t)]}(x(t)). \tag{2.7.8}$$

容易验证 $E_{\rho,t}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上定义了一个谱族, 即 $E_{\rho,t}$ 是一个单调的, 右连续的投影算子族且 $E_{\rho,t} \to I \ (t \to +\infty)$, $E_{\rho,t} \to 0 \ (t \to -\infty)$.

例 2.7.3 设 $\{\lambda_i\}$ 是两两不相同的实数组成的数列, $\{P_i\}$ 是 Hilbert 空间的一个单位分解, 则

$$E_t = \sum_{\{j \mid \lambda_j \leqslant t\}} P_j, \tag{2.7.9}$$

定义了 H 上的一个谱族.

显然 $\{E_t\}$ 满足定义 2.7.1 中的 (1)、(2)、(3), 且对于 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\|(E_{t+\varepsilon} - E_t)\, x\|^2 = \sum_{\{j \mid t < \lambda_j \leqslant t+\varepsilon\}} \|P_j x\|^2.$$

由于 $\sum\limits_j \|P_j x\|^2$ 是收敛的, 且对于每一个 $n_0 \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $j \leqslant n_0$ 时, $\lambda_j \notin (t, t+\varepsilon]$, 于是

$$\|(E_{t+\varepsilon} - E_t)\, x\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \forall x \in H.$$

设 E 是 Hilbert 空间 H 中的一个谱族, 对于 $\forall x \in H$, 定义

$$\rho_x(t) = (E_t(x), x) = ||E_t(x)||^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

那么 $\rho_x(t)$ 是有界、单增 (不减) 的、右连续的实值函数, 且

$$\lim_{t\to-\infty} \rho_x(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \rho_x(t) = \|x\|.$$

2.7.2 谱积分

定理 2.7.4 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭算子, 记 $T_\lambda = T - \lambda I$, 令 E_λ 为 $\mathcal{N}(T_\lambda^+)$ 上的投影算子, 那么 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 $[m, M]$ 上定义的一个谱族, 其中 m, M 同定理 2.6.8, 即

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x).$$

证明 令 $\lambda < \mu$, 由于 $T_\lambda = T_\lambda^+ - T_\lambda^- \leqslant T_\lambda^+$, 因此 $T_\lambda^+ - T_\mu \geqslant T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda)I \geqslant 0$, 注意到它们的自共轭性和相互可交换, 有

$$T_\mu^+(T_\lambda^+ - T_\mu) = T_\mu^+(T_\lambda^+ - T_\mu^+ + T_\mu^-) \geqslant 0.$$

由于 $T_\mu^+ T_\mu^- =0$, 于是

$$T_\mu^+ T_\lambda^+ \geqslant {T_\mu^+}^2.$$

对于 $\forall x \in H$,

$$(T_\mu^+ T_\lambda^+ x, x) \geqslant (T_\mu^{+2} x, x) = ||T_\mu^+ x||^2 \geqslant 0,$$

即 $\mathcal{N}(T_\lambda^+) \subset \mathcal{N}(T_\mu^+)$, 这证明了 E_λ 的单调性.

对于 $\lambda < m$, 如果 $E_\lambda \neq 0$, 那么存在 $z \in H$, 使得 $E_\lambda z \neq 0$. 注意到 E_λ 是投影算子, 令 $x = E_\lambda z$ (不妨假定 $\|x\| = 1$), $E_\lambda x = E_\lambda^2 z = E_\lambda z = x$, 于是

$$(T_\lambda E_\lambda x, x) = (T_\lambda x, x) = (Tx, x) - \lambda \geqslant m - \lambda > 0.$$

根据 (1.5.23) $T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^- \leqslant 0$, 矛盾.

类似地可以证明, 当 $\lambda > M, E_\lambda = I$. 关于右连续性, 在区间 $\Delta = (\lambda, \mu]$ 上考虑算子

$$E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda. \tag{2.7.10}$$

显然, $E(\Delta)$ 是一个非负的投影算子且

$$E_\mu E(\Delta) = E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta), \tag{2.7.11}$$

$$(I - E_\lambda)E(\Delta) = E(\Delta) - E_\lambda(E_\mu - E_\lambda) = E(\Delta), \tag{2.7.12}$$

结合 (1.5.23) 有

$$T_\mu E(\Delta) = T_\mu E_\mu E(\Delta) = -T_\mu^- E(\Delta) \leqslant 0,$$

$$T_\lambda E(\Delta) = T_\lambda(I - E_\lambda)E(\Delta) = T_\lambda^+ E(\Delta) \geqslant 0.$$

于是有

$$\lambda E(\Delta) \leqslant TE(\Delta) \leqslant \mu E(\Delta). \tag{2.7.13}$$

根据 E_λ 的单调性, 令 μ 从右方单调逼近 λ, 相似于定理 1.5.20 得到对于 $\forall x \in H$,

$$E(\Delta)x \to P(\lambda)x \quad (\mu \to \lambda+), \tag{2.7.14}$$

其中 $P(\lambda)$ 是一个有界的自共轭投影算子, 结合 (2.7.13), $\lambda P(\lambda) = TP(\lambda)$, 即 $T_\lambda P(\lambda) = 0$. 于是结合 (1.5.23) 有

$$T_\lambda^+ P(\lambda) = T_\lambda(I - E_\lambda)P(\lambda) = (I - E_\lambda)T_\lambda P(\lambda) = 0,$$

即 $P(\lambda)x \in \mathcal{N}(T_\lambda^+)$, 因此

$$E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda). \tag{2.7.15}$$

同时, 在 (2.7.12) 中令 $\mu \to \lambda+$ 有

$$(I - E_\lambda)P(\lambda) = P(\lambda). \tag{2.7.16}$$

于是得到 $P(\lambda) = 0$. 结合 (2.7.14) 说明 E_λ 右连续. □

定理 2.7.5 (有界自共轭算子的谱分解定理) 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭线性算子, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是它的谱族, 那么 T 可表示为如下的谱积分:

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda \mathrm{d}E_\lambda,$$

其中积分是按算子范数收敛意义下积分和式的极限.

证明 在区间 $(a, b) \supset [m, M]$ 上作一个分划, 其小区间为

$$\Delta_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}], \quad j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

其中 $\lambda_1 = a$, $\lambda_n = b$ 且分划的模记为 $\max\limits_j \{|\Delta_j| = |\lambda_{j+1} - \lambda_j|\}$. 根据 (2.7.13), 在子区间 Δ_j 上,

$$\lambda_j E(\Delta_j) \leqslant TE(\Delta_j) \leqslant \lambda_{j+1} E(\Delta_j). \tag{2.7.17}$$

在各个小区间上求和, 得

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j E(\Delta_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} TE(\Delta_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+1} E(\Delta_j). \tag{2.7.18}$$

注意到

$$T\sum_{j=1}^{n}E(\varDelta_j)=T\sum_{j=1}^{n}\left(E_{\lambda_{j+1}}-E_{\lambda_j}\right)=T(I-0)=T. \tag{2.7.19}$$

对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在一个分划, 使得 $\max\limits_j\{|\varDelta_j|\}<\varepsilon$, 且

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j+1}E(\varDelta_j)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jE(\varDelta_j)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)E(\varDelta_j)<\varepsilon I.$$

于是, 只要分划的模 $\max\limits_j\{|\varDelta_j|\}<\varepsilon$ 时, 在 $\varDelta_j$ 中任选点 ξ_j, 结合 (2.7.18) 和 (2.7.19) 有

$$\left\|T-\sum_{j=1}^{n}\xi_jE(\varDelta_j)\right\|<\varepsilon, \tag{2.7.20}$$

即

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}E_\lambda.$$

其收敛是在算子范数意义下的. □

注 1 由于 $\lambda<m, E_\lambda=0, \lambda\geqslant M, E_\lambda=I$, 上述证明过程与 $a<m, b>M$ 的具体选择无关.

注 2 E_m 可以不等于零, 即

$$\int_a^M\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda=\int_{m-0}^{M}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda=mE_m+\int_m^M\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda. \tag{2.7.21}$$

由于按算子的范数收敛可推出强收敛, 再结合内积的连续性, 有

推论 2.7.6 在定理 2.7.5 的假设下, 对于 $\forall x,y\in H$, 有

$$(Tx,y)=\int_{m-0}^{M}\lambda\,\mathrm{d}(E_\lambda x,y), \tag{2.7.22}$$

其中积分是 Riemann-Stieltjes 积分.

定理 2.7.7 T, E_λ 同定理 2.7.5, $p(\lambda)$ 是 λ 的实系数多项式, 则

$$p(T)=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda, \tag{2.7.23}$$

$$(p(T)x,y)=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x,y),\quad \forall x,y\in H. \tag{2.7.24}$$

证明　只要证明 $p(\lambda)=\lambda^r$ 时成立即可. 对于 $k<\lambda\leqslant\mu<\nu$, 由于

$$(E_\lambda-E_k)(E_\mu-E_\nu)=E_\lambda E_\mu-E_\lambda E_\nu-E_kE_\mu+E_kE_\nu=E_\lambda-E_\lambda-E_k+E_k=0,$$

以及 $E(\varDelta_j)$ 是投影算子, $E(\varDelta_j)^s=E(\varDelta_j)$, 可以有

$$\left(\sum_{j=1}^n\xi_jE(\varDelta_j)\right)^r=\sum_{j=1}^n\xi_j^rE(\varDelta_j), \tag{2.7.25}$$

注意到有界线性算子相乘仍然是有界的, 以及 (2.7.20) 我们有: 当分划相当细时,

$$\left\|T^r-\sum_{j=1}^n\xi_j^rE(\varDelta_j)\right\|<\varepsilon.$$

□

2.7.3　谱族与线性算子的谱

线性算子的谱族反映了线性算子谱的基本性质, 可以得到

定理 2.7.8　设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的有界自共轭线性算子, $\{E_\lambda\}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ 是其对应的谱族, 那么 λ_0 是 T 的特征值当且仅当映射 $\lambda\mapsto E_\lambda$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 点不连续 (即 $E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$), 且

$$\mathcal{N}(T-\lambda_0I)=(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H). \tag{2.7.26}$$

证明　在区间 $\varDelta_0=\left(\lambda_0-\dfrac{1}{n},\lambda_0\right]$ 上, 由 (2.7.13) 有

$$\left(\lambda_0-\frac{1}{n}\right)E(\varDelta_0)\leqslant TE(\varDelta_0)\leqslant\lambda_0E(\varDelta_0). \tag{2.7.27}$$

当 $n\to\infty$, $E(\varDelta_0)\to E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$, 有

$$T(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})=\lambda_0(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}),$$

于是

$$(T-\lambda_0I)(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})=0,$$

即 $(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H)\subset\mathcal{N}(T-\lambda_0I)$. 反之, 如果 $\lambda_0\notin[m,M]$, 由定理 2.6.8, $\lambda_0\in\rho(T)$, 于是 $\mathcal{N}(T-\lambda_0I)=\{0\}\subset(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H)$. 当 $\lambda_0\in[m,M]$, 令 $x\in\mathcal{N}(T-\lambda_0I)$, 因为 $(T-\lambda_0I)x=0$, 于是 $(T-\lambda_0I)^2x=0$. 由定理 2.7.7 知, 对于 $a<m$, $b>M$,

$$\int_a^b(\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=0.$$

由于 $(E_\lambda x, x)$ 是单增 (不减) 的函数, $(\lambda-\lambda_0)^2 \geqslant 0$, 因此上述积分在 (a,b) 的任何具有正测度的子区间上积分为零. 特别地, 对于 $\varepsilon>0$,

$$0=\int_a^{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x,x)\geqslant\varepsilon^2\int_a^{\lambda_0-\varepsilon}\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\varepsilon^2(E_{\lambda_0-\varepsilon}x,x),$$

由于 $E_{\lambda_0-\varepsilon}$ 是自共轭投影算子, 有

$$E_{\lambda_0-\varepsilon}x=0. \tag{2.7.28}$$

同时

$$0=\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b}(\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x,x)\geqslant\varepsilon^2\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{b}\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\varepsilon^2(Ix,x)-\varepsilon^2(E_{\lambda_0+\varepsilon}x,x),$$

即

$$x-E_{\lambda_0+\varepsilon}x=0. \tag{2.7.29}$$

由 (2.7.28) 和 (2.7.29), 令 $\varepsilon\to0$, 得到

$$(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0-0})x=(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})x=x,$$

即 $\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)\subset(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(H)$. 等式 (2.7.26) 得证. 由于 λ_0 是特征值的充要条件是 $\mathcal{N}(T-\lambda_0 I)\neq\{0\}$, 由 (2.7.26) 结合 E_λ 右连续得到 λ_0 是 T 的特征值充要条件是 E_λ 在 λ_0 点不连续 $(E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0})$. □

定理 2.7.9 $H,T,\{E_\lambda\}$ 定义同上. λ_0 属于 T 的正则集 $\rho(T)$ 的充分必要条件是存在一个 $\delta>0$, 使得在区间 $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$ 上, E_λ 恒相等, 即 $E_{\mu_1}=E_{\mu_2}$, 对于任意的 $\mu_1,\mu_2\in[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$.

证明 充分性. 假设 λ_0 是实数, 存在 $\delta>0$, 在 $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$ 上 E_λ 相等, 根据定理 2.7.7,

$$||(T-\lambda_0 I)x||^2=((T-\lambda_0 I)^2x,x)=\int_{m-0}^{M}(\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(E_\lambda x,x). \tag{2.7.30}$$

由于在 $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$ 上, $\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=0$, 在 $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$ 外, $(\lambda-\lambda_0)^2\geqslant\delta^2$, 所以

$$\|(T-\lambda_0 I)x\|^2\geqslant\delta^2\int_{m-0}^{M}\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\delta^2(x,x),$$

即对于 $\forall x\in H$,

$$\|(T-\lambda_0 I)x\|\geqslant\delta\,\|x\|. \tag{2.7.31}$$

由于 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)=\varnothing$, 故 $\lambda_0\in\rho(T)$.

必要性. 因为 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 则 (2.7.31) 成立, 结合 (2.7.30),

$$\int_{m-0}^{M} (\lambda - \lambda_0)^2 \, \mathrm{d}(E_\lambda x, x) \geqslant \delta^2 \int_{m-0}^{M} \mathrm{d}(E_\lambda x, x). \tag{2.7.32}$$

假如 $\{E_\lambda\}$ 在 $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ 上不相等, 则存在 $\eta < \delta$, 使得 $E_{\lambda_0+\eta} - E_{\lambda_0-\eta} \neq 0$, 因此存在 $y \in H$, 使得

$$x = (E_{\lambda_0+\eta} - E_{\lambda_0-\eta})y \neq 0. \tag{2.7.33}$$

因此

$$E_\lambda x = E_\lambda(E_{\lambda_0+\eta} - E_{\lambda_0-\eta})y. \tag{2.7.34}$$

注意到 $\{E_\lambda\}$ 的单调性, 因此当 $\lambda < \lambda_0 - \eta$ 时,

$$E_\lambda x = (E_\lambda - E_\lambda)y = 0. \tag{2.7.35}$$

当 $\lambda > \lambda_0 + \eta$ 时,

$$E_\lambda x = (E_{\lambda_0+\eta} - E_{\lambda_0-\eta})y, \tag{2.7.36}$$

即 $E_\lambda x$ 在 $(m, \lambda_0 - \eta), (\lambda_0 + \eta, M]$ 上保持不变, 因此 (2.7.32) 成为

$$\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} (\lambda - \lambda_0)^2 \, \mathrm{d}(E_\lambda x, x) \geqslant \delta^2 \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} \mathrm{d}(E_\lambda x, x),$$

且由 (2.7.33), 在 $[\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta]$ 上,

$$\begin{aligned}(E_\lambda x, x) &= ((E_\lambda - E_{\lambda_0-\eta})y, x) \\ &= ((E_\lambda - E_{\lambda_0-\eta})y, (E_{\lambda_0+\eta} - E_{\lambda_0-\eta})y) = ((E_\lambda - E_{\lambda_0-\eta})y, y).\end{aligned}$$

于是有

$$\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} (\lambda - \lambda_0)^2 \, \mathrm{d}(E_\lambda y, y) \geqslant \delta^2 \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} \mathrm{d}(E_\lambda y, y). \tag{2.7.37}$$

在 (2.7.37) 中, 由于 (2.7.33) y 的选取, $\displaystyle\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} \mathrm{d}(E_\lambda y, y) > 0$, 但 $(\lambda - \lambda_0)^2 \leqslant \eta^2 < \delta^2$, 矛盾. □

对于自共轭算子 T, 由于剩余谱是空集, $\sigma_{\mathrm{c}}(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, 由定理 2.7.8 和定理 2.7.9, 我们有以下定理

定理 2.7.10 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭线性算子, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ 是 T 的谱族, $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$ 充分必要条件是 E_λ 在 λ_0 点连续, 即 $E_{\lambda_0} = E_{\lambda_0 - 0}$, 并且它在任何包括 λ_0 的实轴区间上不是常值算子.

例 2.7.11 设 T 是 Hilbert 空间 H 上紧的自共轭算子, $\{\lambda_j\}$ 是 T 的非零特征值, P_j 是 $\mathcal{N}(T-\lambda_j I)$ 上的投影算子, P_0 是 $\mathcal{N}(T)$ 上的投影算子, 则

$$E_t=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\{j|\lambda_j\leqslant t\}} P_j, & t<0,\\ \displaystyle\sum_{\{j|\lambda_j\leqslant t\}} P_j+P_0, & t\geqslant 0,\end{cases} \tag{2.7.38}$$

定义了 T 的一个谱族, 并且

$$T=\int_{\mathbb{R}}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda=\int_{m-0}^{M}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda.$$

它是定理 2.7.5 的特例, 且从 (2.7.38) 看到特征值仅在谱族的不连续点取得, 在其余部分, 谱族是常值算子.

习 题 2.7

1. 设 H 为 Hilbert 空间, $H\neq\{0\}$. 求零算子 $T=0$: $H\to H$ 的谱族 $\{E_\lambda\}$, 并证明 T 有谱分解

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}E_\lambda,$$

其中积分是在算子范数的收敛意义下.

2. 设 $T=I$: $H\to H$, 求 $(T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}, T_\lambda^+\mathcal{N}(T_\lambda^+), E_\lambda$, 并证明 T 有谱分解

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$$

(这里积分意义同习题 1).

3. 考虑实数 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ 和 Hilbert 空间 H 到 H 的 n 个两两正交的子空间上的投影 $P_1,\cdots,P_n$. 假定 $P_1+\cdots+P_n=I$. 证明

$$E_\lambda=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}P_k$$

定义了一谱族, 并列举出相对应的算子 $T=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$ 的某些性质.

4. 若算子 T: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 关于一标准正交基由矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

表示, 试问对应的谱族是什么? 并利用此结果, 对该算子证明

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}E_\lambda.$$

5. 试问一 n 行 Hermitian 矩阵对应于什么样的谱族? 试对这种情形证明

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

6. 考虑乘法算子 T: $L^2[0,1]\to L^2[0,1]$,

$$y(t)=Tx(t)=tx(t).$$

证明 (1) $\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$;

(2) T 对应的谱族由下式定义

$$E_\lambda x=\begin{cases}0, & \lambda<0,\\ v_\lambda, & 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\\ x, & \lambda>1,\end{cases}$$

其中

$$v_\lambda(t)=\begin{cases}x(t), & 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ 0, & \lambda<t\leqslant 1.\end{cases}$$

(3) T 的谱族满足定理 2.7.8、定理 2.7.9 及定理 2.7.10.

7. 求出由 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\to\left(\dfrac{\xi_1}{1},\dfrac{\xi_2}{2},\dfrac{\xi_3}{3},\cdots\right)$ 定义的算子 T: $l^2\to l^2$ 的谱族, 找出由特征元素组成的标准正交集.

8. 在习题 7 中, 证明 $T=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j}P_j$, 其中 P_j 是从 l^2 到 $e_j=(\delta_{jn})$ 生成的空间上的投影, 而且级数按 $\mathfrak{B}(l^2)$ 中的范数收敛.

9. 在 Hermite 矩阵的情形, 由定理 2.7.8 可以得出什么结论?

10. 若定理 2.7.8 中的 T 是紧的, 而且有无穷多的特征值. 则由定理 2.7.8 和定理 2.7.9 我们关于 $\{E_\lambda\}$ 能得出什么样的结论?

11. 设 T: $l^2\to l^2$ 是由 $y=(\eta_j)=Tx$ 定义, 其中 $x=(\xi_j)$, $\eta_j=\alpha_j\xi_j$, 而 (α_j) 是一有限区间 $[a,b]$ 中的任意实数列. 证明对应的谱族 (E_λ) 由下式定义

$$(E_\lambda x,y)=\sum_{\alpha_j\leqslant\lambda}\xi_j\eta_j.$$

12. Hilbert 空间 $H\neq\{0\}$ 上的有界自共轭线性算子 T: $H\to H$ 称为具有纯点谱, 如果 T 的特征元素组成的标准正交集在 H 中是完全的 (一个正交集 M 称为在 H 中是完全的, 当且仅当 $\overline{\operatorname{span} M}=H$). 举例说明这不蕴涵 $\sigma_c(T)=\varnothing$.

§2.8 自共轭算子的演算和它的谱分解

2.8.1 算子演算和谱积分

为了把有界自共轭线性算子的谱理论推广到更一般的算子, 通过算子演算得到一些新算子谱的性质.

定理 2.8.1 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的有界自共轭线性算子, p, p_1, p_2 是实系数的多项式, 那么

(1) $p(T)$ 是自共轭的;

(2) 如果 $p(\lambda) \geqslant 0,\ \lambda \in [m, M]$, 则 $p(T) \geqslant 0$, 其中 m, M 是与 T 相关的谱的下、上界;

(3) 如果 $p_1(\lambda) \leqslant p_2(\lambda), \lambda \in [m, M]$, 则 $p_1(T) \leqslant p_2(T)$;

(4) $\|p(T)\| \leqslant \max\limits_{m \leqslant \lambda \leqslant M} |p(\lambda)|$;

(5) 有界线性算子 S 与 T 可交换, 则 S 与 $p(T)$ 也可以交换.

证明 (1) 只要注意到 $(\alpha_j T^j)^* = \alpha_j T^j$, 其中 $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

(2) 由于当 $\lambda \in [m, M]$ 时, $p(\lambda) \geqslant 0$, $p(\lambda)$ 在 $[m, M]$ 中只能有偶数重零点, 且实系数多项式的复根是共轭对, 于是 $p(\lambda)$ 可以按其零点分解为

$$p(\lambda) = \alpha \prod_j (\lambda - \beta_j) \prod_k (\gamma_k - \lambda) \prod_l [(\lambda - \mu_l)^2 + \nu_l^2],$$

其中 $\beta_j \leqslant m,\ \gamma_k \geqslant M$, 则

$$p(T) = \alpha \prod (T - \beta_j) \prod (\gamma_k - T) \prod [(T - \mu_l)^2 + \nu_l^2].$$

通过简单的计算, 以及它们之间的可交换性, 由引理 1.5.18, 其乘积算子是非负的.

(3) 可由 (2) 直接推出.

(4) 令 $k = \max\limits_{m \leqslant \lambda \leqslant M} |p(\lambda)|$, 于是 $0 \leqslant p^2(\lambda) \leqslant k^2$, 由 (3) 推知 $p^2(T) \leqslant k^2 I$, 我们有

$$(p(T)x, p(T)x) = (p^2(T)x, x) \leqslant k^2(x, x),$$

即 $||p(T)|| \leqslant k$.

(5) 可以由定义直接推出. □

定理 2.8.2 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的有界自共轭线性算子, f 是定义在 $[m, M]$ 上的实值连续函数, 其中 $m = \inf\limits_{||x||=1} (Tx, x), M = \sup\limits_{||x||=1} (Tx, x)$, 则 $f(T)$ 是一个有界自共轭线性算子.

证明　由 Weierstrass 逼近定理, 对于 $[m, M]$ 上的实值连续函数 $f(\lambda)$, 存在实系数多项式 $p_n(\lambda)$, 使得 $p_n(\lambda)$ 一致收敛到 $f(\lambda)$. 由定理 2.8.1 知,

$$\|p_n(T) - p_m(T)\| \leqslant \max_{m \leqslant \lambda \leqslant M} |p_n(\lambda) - p_m(\lambda)|. \tag{2.8.1}$$

因此 $\{p_n(T)\}$ 按算子范数收敛, 记为 $f(T)$. 由定理 1.5.5, $f(T)$ 是有界自共轭的线性算子, 与经典分析的办法相似, 可以证明 $f(T)$ 与 $\{p_n(\lambda)\}$ 的选择无关. □

定理 2.8.3　设 H 是 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的有界自共轭线性算子, f 是定义在 $[m, M]$ 上的实值连续函数, 其中 m, M 同上, 则 $f(T)$ 可以表示为

$$f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda, \tag{2.8.2}$$

其中 $\{E_\lambda\}$ 是 T 产生的谱族, 积分是按算子范数收敛的意义下积分和数的极限. 对于 $\forall x,\ y \in H$ 有

$$(f(T)x, y) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) \mathrm{d}(E_\lambda x, y), \tag{2.8.3}$$

其中积分是在 Riemann-Stieltjes 的意义下.

证明　同定理 2.7.5, 对于区间 $(a, b) \supset [m, M]$ 作一个分划, 注意到存在实系数多项式 $p(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 相距很小 (在一致收敛的意义下), 以及 $p(T)$ 可以用分划下的积分和数来逼近, 当分划十分细时, 我们有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{n_j}) E(\Delta_{n_j}) - f(T)\right\| &\leqslant \left\|\sum_{j=1}^{n} \left[f(\xi_{n_j}) - p(\xi_{n_j})\right] E(\Delta_{n_j})\right\| \\ &\quad + \left\|\sum_{j=1}^{n} p(\xi_{n_j}) E(\Delta_{n_j}) - p(T)\right\| + \|p(T) - f(T)\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned} \tag{2.8.4}$$

由此可推出定理的结论成立. □

注　使用类似的方法可以证明, 对于任意 $[m, M]$ 上定义的 Borel 函数 f, 定理的结论亦然成立. 当 f 是实值的, $f(T)$ 是自共轭的.

2.8.2　酉算子

酉算子是一类十分重要的有界线性算子, 可以借助上述定理, 通过自共轭算子的谱族, 给出酉算子的谱分解.

定义 2.8.4　设 H 是一个 Hilbert 空间, U 是从 H 上到 H 上的有界线性算子, 满足

$$U^*U = I \text{ 和 } UU^* = I, \tag{2.8.5}$$

则称 U 为酉算子.

从定义容易验证.

定理 2.8.5 设 U,V 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的酉算子, 则

(1) 对于 $\forall x_1,\ x_2 \in H, (Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2)$, 即 U 是等距的, $\|Ux\| = \|x\|\ (\forall x \in H)$;

(2) 只要 $H \neq \{0\}$, $\|U\| = 1$;

(3) U 的逆算子存在, 且 $U^{-1} = U^*$;

(4) U 是正常的线性算子;

(5) UV 是酉算子.

注 等距的线性算子不一定是酉算子, 例如

$$T\colon l^2 \to l^2,\ 对于\ \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2,$$

$$T\colon\ (\xi_1, \xi_2, \cdots) \to (0, \xi_1, \xi_2, \cdots).$$

T 是等距的, 但不是酉算子.

定理 2.8.6 设 U 是从 Hilbert 空间 H 到 H 的酉算子, $H \neq \{0\}$, 那么 U 的谱集 $\sigma(U)$ 是单位圆上的一个闭子集, 即

$$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \big| |\lambda| = 1\}. \tag{2.8.6}$$

证明 因为 $\|U\| = \|U^*\| = 1$, 对于 $|\lambda| > 1$, 我们有 $\lambda \in \rho(U) \cap \rho(U^*)$. 另外, 由于 U^{-1} 存在且有界, $0 \in \rho(U)$. 对于 $0 < \lambda < 1$, $\lambda^{-1} \in \rho(U^*)$, 于是

$$\lambda I - U = \lambda U(U^* - \lambda^{-1} I),$$

故

$$(\lambda I - U)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(U^* - \lambda^{-1} I)^{-1} U^* \tag{2.8.7}$$

存在且有界, 即 $\lambda \in \rho(\cup)$. 这样 $\lambda \in \sigma(\cup) \Rightarrow |\lambda| = 1$, 且根据定理 2.2.3 谱集是闭的, 定理得证. □

例 2.8.7 设 $H = L^2(a,b)$, 区间 (a,b) 可以是无穷区间, 算子 U 定义为 $Ux = y$, 其中

$$y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} x(t), \quad \forall x \in H.$$

显然 U 是酉算子, 且

$$\sigma(U) = \overline{\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} | a < t < b\}}.$$

定理 2.8.8 设 U 是 Hilbert 空间 H 上的酉算子, 则存在一个有界的自共轭算子 S, 且 $\sigma(S) \subset [0, 2\pi]$, 并使得

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S} = \cos S + \mathrm{i} \sin S, \tag{2.8.8}$$

其中 $\cos S$ 和 $\sin S$ 的意义同定理 2.8.2.

证明参阅 [17].

结合定理 2.8.3, 我们得到酉算子 U 的谱分解.

定理 2.8.9 设 U 是 H 上的酉算子, 且 $H \neq \{0\}$, 则存在一个谱族 $\{E_\theta\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, 使得

$$U = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}E_\theta = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \, \mathrm{d}E_\theta. \tag{2.8.9}$$

进一步地,

$$f(U) = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \, \mathrm{d}E_\theta, \tag{2.8.10}$$

其中的积分是在算子范数收敛的意义下, 并且对于 $\forall x,\ y \in H$,

$$(f(U)x, y) = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \, \mathrm{d}(E_\theta x, y),$$

其中积分是在 Riemann-Stieltjes 的意义下.

注 我们在这里的积分下限是 0, 而不是 0^-, 原因在于, 如果对于谱族 $\left\{\widetilde{E}_\theta\right\}$, $\widetilde{E}_0 \neq 0$, 定义一个新的谱族 E_θ, 使得

$$E_\theta = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ \tilde{E}_\theta - \tilde{E}_0, & 0 < \theta < 2\pi, \\ I, & \theta = 2\pi, \end{cases}$$

则谱族 $\{E_\theta\}$ 在 0 点连续.

习 题 2.8

1. 若酉算子 U 有特征值 λ_1, λ_2 且 $\lambda_2 \neq \lambda_1$, 证明相应的特征元素 x_1, x_2 是相互正交的.

2. 证明 U: $L^2(-\infty, +\infty) \to L^2(-\infty, +\infty)$ 是酉算子, 其中 $Ux(t) = x(t+c)$, c 是给定的实数.

3. 证明 λ 是酉算子 U: $H \to H$ 的特征值当且仅当 $\overline{(U - \lambda I)(H)} \neq H$.

4. 设 H_1, H_2 是 Hilbert 空间. 算子 $A \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ 是等距的当且仅当 $A^*A = I$.

5. 若 H 是有限维空间, 则 $\mathfrak{B}(H)$ 中的每个等距算子都是酉算子.

6. 设 $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\sum\limits_{-N}^{N}c_v\mathrm{e}^{\mathrm{i}vt}$ 是一个三角多项式, 而且对任何实数 $t, P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})>0$. 则必有三角多项式 $Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\sum\limits_{v=0}^{m}a_v\mathrm{e}^{\mathrm{i}vt}$ 使得 $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=|Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2$.

7. 证明数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}(0<\theta_0<2\pi)$ 是酉算子 U 的正则点的充要条件是有正数 δ, 使得 U 的谱族 E_θ 在 $[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta]$ 中是常算子 (即 E_θ 在 $(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta)$ 中取值与 θ 无关).

8. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭算子, $\{E_\lambda\}$ 是 A 产生的谱族, $f(\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$ 是 $|\lambda|<r(A)+\varepsilon$ ($r(A)$ 是 A 的谱半径) 上的解析函数, 证明

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n=\int_{\sigma(A)}f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda.$$

9. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 证明

(1) 对任何多项式 $p(t), Ap(I-A^*A)=p(I-AA^*)A$;

(2) 对任何实轴 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 可测函数 $f(t), Af(I-A^*A)=f(I-AA^*)A$;

(3) 对任何实轴 $\mathbb{R}$ 上 Borel 可测函数 $f(t), Af(I-A^*A)=f(I-AA^*)A$;

(4) $E^+,E^-(E'^+,E'^-)$ 分别是 $I-AA^*$ $(I-A^*A)$ 所有正、负谱部分的投影, 则对任何 $x\in E'^{\pm}$, 必有 $Ax\in E^{\pm}$.

10. 设 $H=L^2(a,b)$, 其中 (a,b) 是有限区间. 设 $Tx=y$ 由 $y(t)=tx(t)$ 定义, 则乘法算子 T 的谱族由 $E_\lambda x=u$ $(a\leqslant\lambda\leqslant b)$ 定义, 其中

$$u(t)=\begin{cases}x(t), & a\leqslant t\leqslant\lambda,\\ 0, & \lambda<t\leqslant b.\end{cases}$$

11. 设 H 是复 Hilbert 空间, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 H 中的谱族. 对每个实数 t, 作 H 中的算子 $U(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}E_\lambda$, 则 $U(t)$ 是 H 中的酉算子, 而且 $\{U(t)\mid-\infty<t<\infty\}$ 是 H 中的单参数群, 即

$$U(t_1+t_2)=U(t_1)U(t_2),\quad -\infty<t_1,t_2<\infty,$$

并且 $U(t)$ 是强连续的, 即对任何 $t_0\in(-\infty,+\infty)$, 满足条件: 对任何 $x\in H, \lim\limits_{t\to t_0}\|(U(t)-U(t_0))x\|=0$.

12. 设 U 是复 Hilbert 空间 $L^2(a,b)$ $(-\infty\leqslant a<0<b\leqslant\infty)$ 中的酉算子, 则存在两个函数 $K(\xi,x)$ 和 $H(\xi,x)$, $a<\xi<b$, $a<x<b$, 当固定 ξ 时, 作为 x 的函数 $K(\xi,x)$ 及 $H(\xi,x)$ 都属于 $L^2(a,b)$ 且适合条件:

(1)

$$\int_a^b\overline{K(\xi,x)}K(\eta,x)\mathrm{d}x=\int_a^b\overline{H(\xi,x)}H(\eta,x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\min\{|\xi|,|\eta|\}, & \xi\eta\geqslant0,\\ 0, & \xi\eta<0;\end{cases}$$

(2) $\int_0^\eta K(\xi,x)\mathrm{d}x=\int_0^\xi \overline{H(\eta,x)}\mathrm{d}x$,

这时对任意 $f\in L^2(a,b)$, 有

$$(Uf)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \overline{K(x,\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad (U^{-1}f)(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \overline{H(x,\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

13. 设 U 是复 Hilbert 空间 H 上的酉算子, 证明必存在 H 上的酉算子 U_0, 使得 $U_0^3=U$; 并证明存在 H 上的酉算子 U_1, 使得 $\sigma(U_1)$ 落在下半圆周上, 且 $U_1^2=U$.

第三章　无界线性算子

前面我们主要讨论了有界线性算子, 但是在理论和应用上许多线性算子并不是有界的. 特别是量子力学中所涉及的大量线性算子都是无界的, 例如著名的 Schrödinger 算子. 无界线性算子理论是处理近代量子力学的基本数学框架, 特别是微分算子理论运用泛函分析的思想和方法统一地处理、研究微分方程与积分方程中的许多问题. 由于最重要的一类无界线性算子 —— 微分算子是闭的或者是可闭的线性算子, 所以首先研究闭的线性算子, 然后考虑对称算子、自共轭算子, 以及它们的结构. 本章一般都在 Hilbert 空间中考虑问题.

对于有界线性算子 T, 其定义域为 $\mathfrak{D}(T)$, 可以把 T 延拓到 $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ 上, 且保持 T 的范数不变, 进一步地, 还可以把 T 保范地延拓到整个空间 H 上, 只要对于 $x \in \mathfrak{D}(T)^{\perp}$, 令 $Tx = 0$. 因此如无特别说明, 有界线性算子 T 可以理解为定义在全空间上. 无界线性算子则不然, 它的定义域可以不是全空间, 例如微分方程边值问题, 就不是定义在整个 Hilbert 空间上的. 无界线性算子谱理论研究的复杂性, 不仅仅是由于算子的不连续性, 而且也是由于它不在整个空间上有定义. 因此, 这里重述和强调一些最基本的概念.

$\mathfrak{D}(T)$ 是 T 的定义域, $\mathcal{R}(T)$ 是 T 的值域. 两个线性算子 T_1、T_2 称为是相等的, 即 $T_1 = T_2$, 当且仅当 $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$, 并且 $T_1x = T_2x$. T_2 称为 T_1 的扩张 $T_2 \supseteq T_1$ 当且仅当 $\mathfrak{D}(T_2) \supseteq \mathfrak{D}(T_1)$, 并且对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T_1)$, $T_2x = T_1x$.

对于线性算子 T, T_1 和 T_2, 可以定义 $T_1 + T_2, T_2T_1, \alpha T$ 和逆算子 T^{-1},

(1) $\mathfrak{D}(T_1 + T_2) = \mathfrak{D}(T_1) \cap \mathfrak{D}(T_2)$, $(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$;

(2) $\mathfrak{D}(T_2T_1) = \{x \big| x \in \mathfrak{D}(T_1),\ T_1x \in \mathfrak{D}(T_2)\}$, $(T_2T_1)x = T_2(T_1x)$;

(3) 如果 $\alpha = 0$, 那么 $\alpha T = 0$. 如果 $\alpha \neq 0, \mathfrak{D}(\alpha T) = \mathfrak{D}(T)$, $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$;

(4) 如果 T 是一一的, 那么 $\mathfrak{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$, 并且 $T^{-1}y = x$, 如果 $y = Tx$.

进一步, 我们有 $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$, $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$. 一般地, $T_1(T_2 + T_3) \supseteq T_1T_2 + T_1T_3$.

§3.1　闭的和可闭的线性算子

3.1.1　线性算子的图和图模

T 是从 H_1 到 H_2 的线性算子, T 的图像 $G(T)$ 定义为

$$G(T) = \left\{ \langle x, Tx \rangle \middle| x \in \mathfrak{D}(T) \right\}. \tag{3.1.1}$$

$G(T)$ 是乘积空间 $H_1 \times H_2$ 中的子集, 简称为 T 的图.

反过来, $H_1 \times H_2$ 中什么样的集合是 T 的图? 我们有

定理 3.1.1 乘积空间 $H_1 \times H_2$ 中的子集 G 是一个从 H_1 到 H_2 中的线性算子 T 的图, 当且仅当 G 是一个线性子空间, 且满足 $\langle 0, y \rangle \in G$, 可以推出 $y = 0$.

证明 必要性. T 是从 H_1 到 H_2 的线性算子, $G(T)$ 是一个线性子空间. 事实上, $\langle x_1, y_1 \rangle \in G$, $\langle x_2, y_2 \rangle \in G$, 则

$$\begin{aligned} a_1\langle x_1, y_1 \rangle + a_2\langle x_2, y_2 \rangle &= a_1\langle x_1, T(x_1) \rangle + a_2\langle x_2, T(x_2) \rangle \\ &= \langle a_1x_1 + a_2x_2, T(a_1x_1 + a_2x_2) \rangle \in G, \end{aligned}$$

且如果 $\langle 0, y \rangle \in G$, 则 $y = T0 = 0$.

充分性. 设 G 是 $H_1 \times H_2$ 的子空间, 且具有上述性质, 令

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ x \in H_1 \middle| \text{ 存在 } y \in H_2, \text{ 使得 } \langle x, y \rangle \in G \right\}.$$

这样定义的 $\mathfrak{D}(T)$ 是确定的, 因为如果对于 $\forall x \in H_1$, 存在 y_1, y_2, 使得 $\langle x, y_1 \rangle \in G$ 且 $\langle x, y_2 \rangle \in G$, 由于 G 是子空间, 推知 $\langle 0, y_1 - y_2 \rangle \in G$. 由于 G 的性质可知 $y_1 = y_2$, 因此可以定义

$$Tx = y, \quad \langle x, y \rangle \in G.$$

由 G 是线性子空间, 可以证明 T 是一个线性算子. □

注 图的每一个子空间都是一个图.

定义 3.1.2 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是从 $\mathfrak{D}(T)$ 到 H 的线性算子,

$$T : \mathfrak{D}(T) \to H,$$

其中 $\mathfrak{D}(T) \subset H$. 称 T 是一个闭的线性算子, 如果 T 的图

$$G(T) = \{ \langle x, y \rangle | x \in \mathfrak{D}(T),\, y = Tx \} \tag{3.1.2}$$

在乘积赋范空间 $H_1 \times H_2$ 中是闭的, 其中 $H_1 \times H_2$ 中的范数定义为

$$||\langle x, y \rangle|| = (||x||^2 + ||y||^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.3}$$

(3.1.3) 定义的范数称为 T 的图模.

注 由定义可知, 如果 T^{-1} 存在, T 是闭的线性算子, 当且仅当 T^{-1} 是闭的线性算子.

可以用以下的条件来验证一个线性算子是闭的.

定理 3.1.3 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是从 H 到 H 的线性算子, 则 T 是闭的, 当且仅当对于任意的 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$, $x_n \to x$, 及 $Tx_n \to y\,(n \to \infty)$, 可推出 $x \in \mathfrak{D}(T)$, $y = Tx$.

证明 设 $\langle x, y\rangle \in \overline{G(T)}$, 则存在 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$, 使得

$$\langle x_n, Tx_n\rangle \to \langle x, y\rangle \quad (n \to \infty),$$

于是

$$||\langle x_n - x, Tx_n - y\rangle||^2 = ||x_n - x||^2 + ||y_n - y||^2 \to 0,$$

从而 $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, 根据定理中的条件知 $x \in \mathfrak{D}(T)$, $y = Tx$, 即 $\langle x, y\rangle \in G(T)$, T 是闭算子.

反之, 设 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$, 且 $x_n \to x$, $Tx_n \to y\ (n \to \infty)$, 于是 $\langle x_n, Tx_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. 由于 $G(T)$ 是闭的, 则推知 $x \in \mathfrak{D}(T), y = Tx$. □

注 1 T 是闭的, 则 T 的零空间 $\mathcal{N}(T)$ 是闭的.

注 2 容易验证, T 是闭的当且仅当 $T - \lambda I$ 是闭的, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$. 更一般地, T 是闭的线性算子, T_1 是 $\mathfrak{D}(T)$ 上的有界线性算子, 那么 $T + T_1$ 也是闭的线性算子.

定理 3.1.4 设 T 是从 $\mathfrak{D}(T)$ 到 H 的闭的线性算子, 其中 H 是一个 Hilbert 空间, $\mathfrak{D}(T) \subset H$. 如果 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中是闭的, 那么 T 是一个有界的线性算子.

证明 定义从 $G(T)$ 到 H 中的线性算子 $\widetilde{T}$:

$$\widetilde{T}\langle x, Tx\rangle = x, \ \ x \in \mathfrak{D}(T).$$

$\widetilde{T}$ 是从 $G(T)$ 上到 $\mathfrak{D}(T)$ 上的一对一的线性算子, 由于 $G(T)$ 是 $H_1 \times H_2$ 中的闭子空间, $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中是闭的, 由 Banach 逆算子定理 $\widetilde{T}^{-1}$ 有界, 即

$$||\langle x, Tx\rangle|| = ||\widetilde{T}^{-1}x|| \leqslant ||\widetilde{T}^{-1}||||x||.$$

有 $||Tx|| \leqslant \left(||\widetilde{T}^{-1}||^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}||x||$, T 是有界线性算子. □

定理 3.1.5 设 H 是 Hilbert 空间, $\mathfrak{D}(T) \subset H$, T 是一个从 $\mathfrak{D}(T)$ 到 H 的有界线性算子, 那么 T 是闭线性算子的充要条件是 $\mathfrak{D}(T)$ 是闭的.

证明 充分性. 设 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, 由于 $\mathfrak{D}(T)$ 闭, $x \in \mathfrak{D}(T)$. 由于 T 连续, $Tx_n \to Tx$, 于是 $y = Tx$, 故 T 是闭算子.

必要性. 对于任意的 $x \in \overline{\mathfrak{D}(T)}$, 存在点列 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$, 使得 $x_n \to x\ (n \to \infty)$, 因为 T 是有界的, $\{Tx_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 因此存在 $y \in H$, $Tx_n \to y$, 结合 T 是闭算子, 推知 $x \in \mathfrak{D}(T)$ 且 $Tx = y$, 即知 $\mathfrak{D}(T)$ 是闭的. □

注 1 以上三个定理当 H 是 Banach 空间时, 结论依然成立.

注 2 对于闭的线性算子, 线性算子的有界性和 $\mathfrak{D}(T)$ 是否闭紧密联系在一起. 换句话说, 算子定义域 $\mathfrak{D}(T)$ 的确定和扩张在无界线性算子理论中是十分重要的.

3.1.2 闭线性算子的例

例 3.1.6 设 $X = C[0,1]$, $Tx = x'$,

$$T\colon \mathfrak{D}(T) \to X,$$

$\mathfrak{D}(T)$ 是 $C[0,1]$ 中具有连续导数的全体函数, 令

$$x_n \in \mathfrak{D}(T), x_n \to x, \qquad Tx_n = x_n' \to y \quad (n \to \infty).$$

由于 $C[0,1]$ 中的收敛是一致收敛, 因此

$$\begin{aligned}\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \lim_{n\to\infty}(x_n(t) - x_n(0)) = x(t) - x(0),\end{aligned}$$

即

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{3.1.4}$$

于是 $x(t) \in \mathfrak{D}(T)$, $x'(t) = y(t)$, T 是在 $C[0,1]$ 中定义的闭的线性算子.

显然 T 是无界线性算子, $T(t^n) = nt^{n-1}$. $\mathfrak{D}(T) \neq C[0,1]$, $\mathfrak{D}(T)$ 在 $C[0,1]$ 中稠, $\mathfrak{D}(T)$ 不是 $C[0,1]$ 中的闭集.

例 3.1.7 设 $H = L^2[0,1], AC[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上绝对连续函数的全体, 令

$$T\colon \mathfrak{D}(T) = AC[0,1] \to H,\ \ Tx = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{3.1.5}$$

则 T 是在 $L^2[0,1]$ 中定义的闭的无界线性算子.

证明 因为 $x \in AC[0,1]$, $x(t)$ 可以表示成

$$x(t) = \alpha + \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3.1.6}$$

其中 α 是一个数, $u(t) \in H$. 假设 $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $x_n \to x$, 且 $Tx_n = y_n \to y$, 由 (3.1.6) 和 $x_n(t)$ 几乎处处可微, 则

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| &\leqslant \int_0^t |\,x_n'(\tau) - y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \int_0^1 |x_n'(\tau) - y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |x_n'(\tau) - y(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

因为 $Tx_n = x_n'$ 在 H 中收敛到 y, (3.1.8) 说明 $\int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 一致收敛到 $\int_0^t y(\tau)\ \mathrm{d}\tau$.

另一方面,

$$x_n(0) - x_m(0) = x_n(t) - x_m(t) - \int_0^t [x_n'(\tau) - x_m'(\tau)]\,\mathrm{d}\tau,$$

有

$$\begin{aligned}|x_n(0) - x_m(0)| &= \left(\int_0^1 \left|x_n(0) - x_m(0)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left|(x_n(t) - x_m(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_0^1 \left|\int_0^t [x_n'(\tau) - x_m'(\tau)]\mathrm{d}\tau\right|^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

注意到 $x_n(t)$ 是 H 中的 Cauchy 列, 结合 (3.1.8) 推出 $\{x_n(0)\}$ 是一个 Cauchy 数列, 收敛到 β. 于是由 (3.1.7) 和 (3.1.8) 知 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $z(t)$, 其中

$$z(t) = \beta + \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

且 $z'(t)$ 几乎处处等于 $y(t)$, $y(t) \in L^2\,[0,1]$, 即 $z \in \mathfrak{D}(T)$, $Tz = y$. 再由一致收敛知

$$\int_0^1 |x_n(t) - z(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0,$$

即 $x_n(t)$ 按 H 中的范数收敛到 $z(t)$, 于是 $z(t) = x(t)$, 由定义知 T 是闭的线性算子.

但 T 不是有界线性算子, 令 $x_n = t^n$,

$$\|x_n\| = \left(\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|Tx_n\| = \left(\int_0^1 (nt^{(n-1)})^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}},$$

即 $\dfrac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \to \infty (n \to \infty)$, T 是无界的. □

3.1.3 可闭的线性算子

定义 3.1.8 T 是从 H_1 到 H_2 的线性算子, T 称为是可闭的, 如果 $\overline{G(T)}$ 是一个图, 即 $\overline{G(T)}$ 满足定理 3.1.1 的两个条件.

由定理 3.1.1 的证明可知, 如果 T 是可闭的, 则存在唯一确定的线性算子 $\overline{T}$, 使得

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}. \tag{3.1.9}$$

$\overline{T}$ 是闭的, 称为 T 的闭包.

由可闭线性算子的定义以及 $\overline{T}$ 的定义有

定理 3.1.9　(1) T 是可闭的线性算子, 当且仅当如果 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T)$, $x_n \to 0, \{Tx_n\}$ 在 H_2 中收敛, 则 $Tx_n \to 0$.

(2) T 是可闭的线性算子, 那么

$$\mathfrak{D}(\overline{T}) = \{x \in H_1 \big|\ \exists \{x_n\} \text{ 使得 } x_n \to x, \text{ 且 } \{Tx_n\} \text{ 也是收敛的}\},$$

$$\overline{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n, \quad x \in \mathfrak{D}(\overline{T}). \tag{3.1.10}$$

证明留给读者.

定义 3.1.10　线性算子 T 是线性算子 S 的一个扩张, 如果

$$\mathfrak{D}(S) \subset \mathfrak{D}(T), \text{且 } S = T\big|_{\mathfrak{D}(S)}, \tag{3.1.11}$$

记为 $S \subset T$, 进一步地, 如果 $\mathfrak{D}(S) \neq \mathfrak{D}(T)$, 则称 T 是 S 的一个真的扩张. 若 T 是闭的, T 称为 S 的闭扩张.

注 1　显然, 可闭的线性算子 T 都有一个闭扩张 $\overline{T}$, 由 $\overline{T}$ 的定义可知, $\overline{T}$ 是 T 的最小闭扩张, 即 T 的每一个闭扩张都是 $\overline{T}$ 的闭扩张.

注 2　如果 T 是有界线性算子, 由定理 3.1.9 知 $\mathfrak{D}(\overline{T}) = \overline{\mathfrak{D}(T)}$, 且 $\overline{T}$ 是 T 的一个有界保范扩张, 即 $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

由于 $\overline{T}$ 的图是 T 的图在乘积空间 $H_1 \times H_2$ 中的闭包, 再注意到 T 的图与 T^{-1} 的图仅仅在顺序上不同, 我们可以有:

命题 3.1.11　设 T 是可闭的并且是一一的. 那么 T^{-1} 是可闭的, 当且仅当 $\overline{T}$ 是一一的. 并且有 $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$. 进一步地, 如果 $\overline{T}^{-1}$ 是连续的, 那么 $\overline{T}$ 的值域 $\mathcal{R}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{R}(T)}$.

证明　如果 $\overline{T}$ 是一一的, 那么 $\overline{T}^{-1}$ 是 T^{-1} 的一个闭扩张, 即 T^{-1} 是可闭的. 反之, 如果 T^{-1} 是可闭的, $\overline{G(T^{-1})}$ 是一个图, 且它和 $G(\overline{T})$ 的图, 除顺序以外均相同, 于是可推出 $\overline{T}$ 是一一的, 并且 $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$, 如果 $\overline{T^{-1}}$ 是连续的, 结合上面的注 2, 有

$$\mathcal{R}(\overline{T}) = \mathfrak{D}(\overline{T}^{-1}) = \mathfrak{D}(\overline{T^{-1}}) = \overline{\mathfrak{D}(T^{-1})} = \overline{\mathcal{R}(T)}.$$

□

例 3.1.12　在 $L^2[0,1]$ 中考虑微分算子 T:

$$Tx = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T), \tag{3.1.12}$$

其中 $\mathfrak{D}(T) = \{x \in L^2[0,1] \big|\, x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且具有紧的支柱$\}$. ($x(t)$ 在 I 上具有紧的支柱, 即对于任意的 x, 存在 I 中的紧集 I_1, 使得对于任意的 $t \in I \backslash I_1$, 都有 $x(t) = 0$.)

可以证明, T 是一个可闭的线性算子, 事实上, $\overline{T}$ 是由 (3.1.12) 生成的最小算子, $\mathfrak{D}(\overline{T}) = W_0^{1,2}[0,1]$, 即全体绝对连续, 在区间端点处等于零, 且具有属 $L^2[0,1]$ 的一阶广义导数的函数.

习 题 3.1

1. 证明线性算子 T 是闭的当且仅当 $\mathfrak{D}(T)$ 在图模下完备.

2. 证明 Hilbert 空间上每个有界算子是可闭的, 每个有穷秩可闭算子是有界的.

3. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上线性稠定算子, 且 $\mathrm{Re}(x,Tx) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$. 证明 T 是可闭的.

4. 设 H 是 Hilbert 空间, T: $H \to \mathbb{C}^m$ 是稠定算子, 证明 T 是有界的当且仅当它是可闭的.

5. 证明投影算子的加权和是可闭的.

6. 设 H_1, H_2, H_3 是 Hilbert 空间, $S \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$, $T : H_2 \to H_3$ 是闭算子, 且 $\mathcal{R}(S) \subset \mathfrak{D}(T)$. 证明 $TS \in \mathfrak{B}(H_1, H_3)$.(提示: 证明 TS 是闭的, 且 $\mathfrak{D}(TS) = H_1$.)

7. 设 T 是从 H_1 到 H_2 中的线性算子, S 是从 H_2 到 H_3 中的连续可逆算子. 若 S 和 T 是闭的 (可闭的), 则 ST 也是闭的 (可闭的).

8. 设 $H = L^2[0,1]$, $T = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{u \in H \,\middle|\, u(0) = 0, u \text{ 在 } [0,1] \text{ 上绝对连续}\right\}.$$

证明 T 为闭算子.

9. 设 H 是可分的 Hilbert 空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的归一正交基. 设 $a \in H$, a 不是 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的有穷线性组合. 令 D 为 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 a 的有穷线性组合, 在 D 上定义线性算子

$$T\left(\beta a + \sum \alpha_i e_i\right) = \beta a,$$

上式求和号中只有有限个 α_i 不为零. 求证 $\langle a, a\rangle \in \overline{G(T)}$, $\langle a, 0\rangle \in \overline{G(T)}$, 因此 $\overline{G(T)}$ 不是某个线性算子的图.

10. 设 $H = L^2(\mathbb{R}^1)$, 令

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{u \in H \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty\right\}.$$

对于 $u \in \mathfrak{D}(T)$, 令 $(Tu)(t) = tu(t)$. 说明乘法算子 T 是无界算子并且证明 T 是闭的.

§3.2 共 轭 算 子

3.2.1 无界线性算子的共轭算子

共轭算子在无界线性算子理论中扮演着十分重要的角色, 首先把有界线性算子共轭算子的概念推广到无界线性算子.

定义 3.2.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中稠密,

$$T\colon \mathfrak{D}(T) \to H \tag{3.2.1}$$

是从 $\mathfrak{D}(T)$ 到 H 的线性算子, T 的共轭算子 T^* 定义为从 $\mathfrak{D}(T^*)$ 到 H 的映射

$$T^*\colon \mathfrak{D}(T^*) \to H, \tag{3.2.2}$$

其中

$$\mathfrak{D}(T^*) = \left\{ y \in H \middle| \exists y^*, \text{ 使得对于 } \forall x \in \mathfrak{D}(T), (Tx, y) = (x, y^*) \right\}, \tag{3.2.3}$$

且

$$T^* y = y^*. \tag{3.2.4}$$

注 1 为使 (3.2.4) 确实定义了一个算子, y^* 应是唯一的. 事实上, y^* 是唯一的充要条件是 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中稠密, 因为如果 $\overline{\mathfrak{D}(T)} \neq H$, 则存在 $y_1 \in H$, $y_1 \neq 0$, 且对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $y_1 \perp x$. 于是

$$(x, y^*) = (x, y^*) + (x, y_1) = (x, y^* + y_1).$$

另外, 如果 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中稠密, 即 $\mathfrak{D}(T)^\perp = \{0\}$. 假如 y^* 不唯一, 存在 y_1^*, 使得

$$(x, y_1^*) = (x, y^*), \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T),$$

即

$$(x, y_1^* - y^*) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T).$$

于是

$$y_1^* - y^* = 0, \quad y_1^* = y^*.$$

注 2 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中稠密的线性算子称为稠定的线性算子. 由于赋范空间均可以完备化, 以后一般均认为线性算子是稠定的, 但 $\mathfrak{D}(T)$ 不一定是全空间.

注 3 容易验证 T^* 是一个线性算子, 且对于稠定的线性算子 T_1, T_2 和数值 α, 有

(1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;

(2) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

定理 3.2.2 设 T 是 H 中稠定的线性算子, 则

(1) T^* 是闭的;

(2) 若 T_1, T_2 是 H 中稠定的线性算子, 且 $T_1 \subset T_2$, 则 $T_2^* \subset T_1^*$;

(3) 设 T 是 H 中可闭的, 稠定的线性算子, 则 $(\overline{T})^* = T^*$.

证明 (1) 设 $x_n \in \mathfrak{D}(T^*)$, $x_n \to x_0$, $T^*x_n \to y$, 由 T^* 的定义, 我们有对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$,

$$(Tx, x_n) = (x, T^*x_n).$$

令 $n \to \infty$, 由内积的连续性, 有

$$(Tx, x_0) = (x, y), \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T). \tag{3.2.5}$$

由共轭算子的定义, $x_0 \in \mathfrak{D}(T^*)$, $T^*x_0 = y$, 即 T^* 是闭的线性算子.

(2) 由定义 $y \in \mathfrak{D}(T_2^*)$ 当且仅当存在 y^*, 使得对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T_2)$,

$$(T_2x, y) = (x, y^*), \tag{3.2.6}$$

即 $T_2^*y = y^*$. 由于 $T_1 \subset T_2$, 即 $\mathfrak{D}(T_1) \subset \mathfrak{D}(T_2)$, 且 $T_1x = T_2x, \forall x \in \mathfrak{D}(T_1)$. 于是由 (3.2.6) 有

$$(T_1x, y) = (x, y^*), \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T_1),$$

即 $y \in \mathfrak{D}(T_1^*)$, 且 $T_1^*y = y^* = T_2^*y$. 说明 $T_2^* \subset T_1^*$.

(3) 由于 $T \subset \overline{T}$, 由 (2) 有 $(\overline{T})^* \subset T^*$. 只需证明 $T^* \subset (\overline{T})^*$. 设 $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 由定义, 即对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$,

$$(Tx, y) = (x, T^*y). \tag{3.2.7}$$

对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(\overline{T})$, 由定理 3.1.9 (2) 可知, 存在 $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, 使得 $x_n \to x$ 且 $Tx_n \to \overline{T}x$, 由 (3.2.7) 知

$$(Tx_n, y) = (x_n, T^*y), \tag{3.2.8}$$

令 $n \to \infty$ 有

$$(\overline{T}x, y) = (x, T^*y), \quad \forall x \in \mathfrak{D}(\overline{T}). \tag{3.2.9}$$

即 $y \in \mathfrak{D}(\overline{T}^*)$, 且 $\overline{T}^*y = T^*y$. 故 $T^* \subset (\overline{T})^*$. □

3.2.2 二次共轭算子

对于线性算子 T^*, 如果 T^* 是稠定的, 可以定义 $T^{**} = (T^*)^*$.

定理 3.2.3 设 T 和 T^* 是稠定的线性算子, 则 $T \subset T^{**}$.

证明 由 T^* 的定义, 对于 $z \in \mathfrak{D}(T)$, $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 有

$$(Tz, y) = (z, T^*y),$$

即

$$(T^*y, z) = (y, Tz), \quad \forall y \in \mathfrak{D}(T^*). \tag{3.2.10}$$

根据 T^{**} 的定义, (3.2.10) 说明 $z \in \mathfrak{D}(T^{**})$, 且 $T^{**}z = Tz$, 即 $T \subset T^{**}$. □

注 由于 T^{**} 是闭算子, 即 T^{**} 的存在 ($\mathfrak{D}(T^*)$ 稠) 是 T 可闭的充分条件.

定理 3.2.4　T 是可闭的, 当且仅当 T^* 是稠定的, 并且有 $\overline{T} = T^{**}$.

证明　充分性上面已证, 只需证明必要性, 设映射

$$V:\ \langle x, y\rangle \to \langle -y, x\rangle. \tag{3.2.11}$$

由共轭算子的定义:

$$(Tx, y) = (x, y^*),\quad \forall x \in \mathfrak{D}(T),\ y \in \mathfrak{D}(T^*),$$

推出 $\langle y, y^*\rangle \in G(T^*)$ 的充要条件为

$$\langle y, y^*\rangle \perp V\left\{\langle x, Tx\rangle \middle| x \in \mathfrak{D}(T)\right\}, \tag{3.2.12}$$

其中 $\perp$ 是在乘积空间 $H \times H$ 内积的意义下. 假如 T 可闭, 但 $\mathfrak{D}(T^*)$ 不稠, 即存在 $y_0 \neq 0,\ y_0 \in H$, 使得 $y_0 \perp \mathfrak{D}(T^*)$, 于是

$$\langle y, y^*\rangle \perp \langle y_0, 0\rangle,\quad \forall \langle y, y^*\rangle \in G(T^*). \tag{3.2.13}$$

由于 $y_0 \neq 0$, 由定理 3.1.1 知 $G(T^*)^{\perp}$ 不是一个算子的图, 其中正交补 $\perp$ 是在乘积空间的意义下. 但由 (3.2.12) 知

$$G(T^*)^{\perp} = \overline{V\{\langle x, Tx\rangle | x \in \mathfrak{D}(T)\}}. \tag{3.2.14}$$

由于 T 可闭的, $\overline{V\{\langle x, Tx\rangle | x \in \mathfrak{D}(T)\}} = V\{\langle x, \overline{T}x\rangle | x \in \mathfrak{D}(\overline{T})\}$ 是一个图, 矛盾.

以下证明 $\overline{T} = T^{**}$, 由 T^{**} 的定义,

$$(T^*y, z) = (y, z^*),\quad y \in \mathfrak{D}(T^*), z \in \mathfrak{D}(T^{**}), \tag{3.2.15}$$

即

$$\langle z, z^*\rangle \perp \langle -T^*y, y\rangle. \tag{3.2.16}$$

由于 T^{**} 是闭的,

$$G(T^{**}) = V\{\langle y, T^*y\rangle | y \in \mathfrak{D}(T^*)\}^{\perp}.$$

再由 T^* 的定义

$$(Tx, y) = (x, T^*y),\quad \forall x \in \mathfrak{D}(T),\ y \in \mathfrak{D}(T^*), \tag{3.2.17}$$

即

$$\langle -T^*y, y\rangle \perp \langle x, Tx\rangle. \tag{3.2.18}$$

由 (3.2.16) 和 (3.2.18), 结合 T 是可闭的可知

$$G(T^{**}) = \left\{\langle x, Tx\rangle \middle| x \in \mathfrak{D}(T)\right\}^{\perp\perp} = \overline{\left\{\langle x, Tx\rangle \middle| x \in \mathfrak{D}(T)\right\}} = \overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

于是, 有 $T^{**}=\overline{T}$. □

与有界共轭算子 (定理 1.4.20) 的证明相似, 注意到当 T 是闭的, $T^{**}=T$, 可以证明

定理 3.2.5 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的稠定线性算子, 则

$$\mathcal{R}(T)^{\perp}=\mathcal{N}(T^{*}),$$

如果 T 是闭的, 那么

$$\mathcal{R}(T^{*})^{\perp}=\mathcal{N}(T).$$

定理 3.2.6 如果 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中是稠密的, T^{-1} 存在, 并且 $\mathfrak{D}(T^{-1})$ 在 H 中也是稠密的, 那么 $(T^{-1})^{*}$, $(T^{*})^{-1}$ 存在且

$$(T^{-1})^{*}=(T^{*})^{-1}. \tag{3.2.19}$$

证明 $\mathfrak{D}(T)$ 和 $\mathfrak{D}(T^{-1})$ 的稠密, 保证 T^{*} 和 $(T^{-1})^{*}$ 的存在, 下面要证明 $(T^{*})^{-1}$ 存在且满足 (3.2.19). 首先证明对于 $\forall y\in\mathfrak{D}(T^{*})$, 有

$$(T^{-1})^{*}T^{*}y=y.$$

事实上, 对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T^{-1})$, $T^{-1}x\in\mathfrak{D}(T)$, $\forall y\in\mathfrak{D}(T^{*})$,

$$(T^{-1}x,T^{*}y)=(TT^{-1}x,y)=(x,y). \tag{3.2.20}$$

另外, 由 $(T^{-1})^{*}$ 的定义

$$(T^{-1}x,T^{*}y)=(x,(T^{-1})^{*}T^{*}y),\quad \forall x\in\mathfrak{D}(T^{-1}).$$

由定义可知 $T^{*}y\in\mathfrak{D}((T^{-1})^{*})$, 结合 (3.2.20) 有

$$(T^{-1})^{*}T^{*}y=y,\quad \forall y\in\mathfrak{D}(T^{*}). \tag{3.2.21}$$

由 (3.2.21) 知, $T^{*}y=0$ 意味着 $y=0$, 可知 $(T^{*})^{-1}$ 存在.

以下证明对于 $\forall y\in\mathfrak{D}((T^{-1})^{*})$, 有

$$T^{*}(T^{-1})^{*}y=y.$$

事实上, 对于 $x\in\mathfrak{D}(T)$, $Tx\in\mathcal{R}(T)=\mathfrak{D}(T^{-1})$, 由 $(T^{-1})^{*}$ 的定义

$$(Tx,(T^{-1})^{*}y)=(T^{-1}Tx,y)=(x,y). \tag{3.2.22}$$

另外, 由 T 的共轭算子的定义, 对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$,

$$(Tx, (T^{-1})^*y) = (x, T^*(T^{-1})^*y).$$

由定义知 $(T^{-1})^*y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 结合 (3.2.22),

$$T^*(T^{-1})^*y = y, \quad \forall y \in \mathfrak{D}((T^{-1})^*). \tag{3.2.23}$$

由 (3.2.21) 和 (3.2.23) 知

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

□

习　题　3.2

1. 若 S 和 T 是使得 ST 在 H 中稠定的线性算子, 求证 $(ST)^* \supset T^*S^*$, 若 S 定义在空间 H 上且是有界的, 则 $(ST)^* = T^*S^*$.

2. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的稠定算子, 证明 $\mathfrak{D}(T^*) = \{0\}$ 当且仅当 T 的图 $G(T)$ 在 $H \times H$ 中稠.

3. 设 f 为 $\mathbb{R}^1$ 上有界可测函数, 但是 $f \notin L^2(\mathbb{R}^1)$, 令

$$D = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^1) \middle| \int |f(x)\varphi(x)|\, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

设 $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^1)$, 定义 $T\varphi = (f, \varphi)\varphi_0$, $\forall \varphi \in D$. 证明 T 稠定, 求出 T^*.

4. 设 $T: \mathfrak{D}(T) \to H$ 是线性算子, $G(T)$ 为 T 的图.

(1) 定义 $V: H \times H \to H \times H$,

$$V\langle x, y\rangle = \langle y, -x\rangle.$$

证明 $(Tx, y) = (x, T^*y)$ 可以写成

$$(V\langle x, Tx\rangle, \langle y, T^*y\rangle) = 0,$$

其中 $x \in \mathfrak{D}(T)$, $y \in \mathfrak{D}(T^*)$;

(2) 利用 $(V\langle x, Tx\rangle, \langle y, T^*y\rangle) = 0$, 证明 $G(T^*) = V(G(T))^{\perp}$;

(3) 证明 T 是闭的当且仅当 $G(T) = V(G(T^*))^{\perp}$.

5. 设 $\{e_n | n = 0, 1, \cdots\}$ 是无穷维可分 Hilbert 空间 H 的标准正交基,

$$D = \left\{ x \middle| \sum_{n=0}^{\infty} n\, |(x, e_n)|^2 < \infty,\ x \in H \right\},$$

T 和 $\overline{T}$ 是定义在 D 上的线性算子

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}(x, e_{n+1})e_n,$$

$$\overline{T}x=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(x,e_{n-1})e_n.$$

证明 (1) T 和 $\overline{T}$ 是稠定的;

(2) $\forall x,y\in D$, 有 $(Tx,y)=(x,\overline{T}y)$.

6. 设 $T\colon \mathfrak{D}(T)\to H$ 是闭线性算子, 若 T 是单射, 证明 T^{-1} 是闭的.

7. 设 $T=\mathfrak{D}(T)\to l^2$, 定义为

$$y=(\eta_j)=Tx,\quad \eta_j=j\xi_j, x=(\xi_j),$$

这里 $\mathfrak{D}(T)=\left\{x=(\xi_j)\in l^2\middle|\xi_j\text{中仅有有限个非零项}\right\}$.

(1) 证明 T 是非闭的无界算子.

(2) T 是否有线性真扩张?

(3) T 能否线性扩张到整个 l^2 空间?

8. 证明习题 7 中的 T 有闭的线性扩张 T_1,

$$\mathfrak{D}(T_1)=\left\{x=(\xi_j)\in l^2\middle|\sum_{j=1}^{\infty}j^2\left|\xi_j\right|^2<\infty\right\},$$

$T_1x=(j\xi_j)$.

§3.3 对称算子和自共轭算子

3.3.1 对称算子

在无界线性算子理论中对称算子、自共轭算子都是十分重要的概念, 量子力学中处理的线性算子大多是无界的自共轭算子. 如同有界线性算子一样, 可以研究 T 和 T^* 之间的关系.

定义 3.3.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是 H 中的线性算子, 即 $\mathfrak{D}(T)\subset H$, 且

$$T\colon \mathfrak{D}(T)\to H.$$

T 称为是对称的, 如果 T 是稠定的, 且对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, $y\in\mathfrak{D}(T)$, 有

$$(Tx,y)=(x,Ty).\tag{3.3.1}$$

注 T 是对称的, 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 也是对称的, 事实上, 对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T^{-1})$, $y\in\mathfrak{D}(T^{-1})$,

$$(T^{-1}x,y)=(T^{-1}x,TT^{-1}y)=(TT^{-1}x,T^{-1}y)=(x,T^{-1}y).$$

定理 3.3.2 设 T 是一个对称线性算子, 且 $\mathfrak{D}(T)=H$, 则 T 是有界线性算子.

证明　若 $x_n \to x$, $Tx_n \to y_0$, 则对于 $\forall y \in H$, 有

$$(Tx_n, y) = (x_n, Ty).$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$(y_0, y) = (x, Ty) = (Tx, y),$$

即 $Tx = y_0$, T 是一个闭的线性算子, 由定理 3.1.4 知, T 是有界线性算子.　□

注　定理 3.3.2 说明, 若 T 是无界的对称线性算子, 一定有 $\mathfrak{D}(T) \neq H$, 即不可能把无界对称线性算子的定义域扩张到全空间.

定理 3.3.3　Hilbert 空间 H 中的稠定线性算子 T 是对称的当且仅当 $T \subseteq T^*$.

证明　根据 T^* 的定义, 对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$ 和 $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 有

$$(Tx, y) = (x, T^*y). \tag{3.3.2}$$

如果 $T \subseteq T^*$, 则对于 $y \in \mathfrak{D}(T)$, 有 $Ty = T^*y$, 即对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $y \in \mathfrak{D}(T)$, 有

$$(Tx, y) = (x, Ty),$$

即 T 是对称的. 反之若 (3.3.1) 成立, 与 (3.3.2) 比较说明, $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 且 $T^*y = Ty$, 即

$$\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(T^*), \quad T^*\big|_{\mathfrak{D}(T)} = T,$$

这说明 $T \subseteq T^*$.　□

注　如果 T 是 H 中稠定的对称线性算子, $T \subset T^*$, 由定理 3.1.9 (1) 结合 T^* 是闭算子, 可推知 T 是可闭的, $\overline{T}$ 存在. 且由定理 3.2.2 知, $(\overline{T})^* = T^*$.

3.3.2　自共轭的线性算子

定义 3.3.4　设 H 是一个 Hilbert 空间,

$$T\colon \mathfrak{D}(T) \subset H \to H$$

是一个稠定的线性算子, T 称为是自共轭的, 如果 $T = T^*$.

注 1　显然自共轭的线性算子是对称的, 但对称的线性算子不一定是自共轭的.

注 2　可以类似于定理 1.5.7 证明: T 是对称线性算子 (但不一定是自共轭的), 当且仅当对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, (Tx, x) 是实的.

定义 3.3.5　线性算子 T 称为是本质自共轭的,如果 $\overline{T}$ 是自共轭的.

定理 3.3.6 下列叙述是等价的:

(1) T 是本质自共轭的;

(2) $\overline{T} = T^*$ 是 T 的唯一的自共轭扩张;

(3) T^* 是对称的;

(4) T^* 是自共轭的.

证明留给读者.

例 3.3.7 设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是 H 的正交基, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 是可数多个复数, 定义

$$D = \left\{ x \in H \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left| \alpha_n (x, e_n) \right|^2 < \infty \right. \right\}, \tag{3.3.3}$$

且

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) e_n, \quad x \in D, \tag{3.3.4}$$

则 T 是一个闭算子, $\mathfrak{D}(T^*) = D$, 且

$$T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha}_n (x, e_n) e_n, \quad x \in D. \tag{3.3.5}$$

当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 是实数时, T 是自共轭算子.

例 3.3.8 设 (X, Ω, μ) 是一个 σ 有限的测度空间, $\phi(t)$ 是 Ω 上的可测函数,

$$D = \left\{ x \in L^2(X, \Omega, \mu) \middle| \phi x \in L^2(X, \Omega, \mu) \right\},$$

定义

$$Tx = \phi \cdot x, \quad \forall x \in D, \tag{3.3.6}$$

则 T 是 $L^2(X, \Omega, \mu)$ 上的闭线性算子, 且

$$\mathfrak{D}(T^*) = D, T^* x = \overline{\phi} \cdot x, \quad \forall x \in D. \tag{3.3.7}$$

当 $\phi(t)$ 是实函数时, T 是自共轭的.

例 3.3.9 设 $H = L^2[0,1]$. 令

$$\mathfrak{D}(T_1) = \left\{ x \middle| x \in L^2[0,1], x \text{ 在 } [0,1] \text{ 上绝对连续, 且 } x' \in L^2[0,1] \right\}, \tag{3.3.8}$$

$$\mathfrak{D}(T_2) = \mathfrak{D}(T_1) \bigcap \{ x |\, x(0) = x(1) \}, \tag{3.3.9}$$

$$\mathfrak{D}(T_3) = \mathfrak{D}(T_1) \bigcap \left\{ x \middle| x(0) = x(1) = 0 \right\}. \tag{3.3.10}$$

定义

$$T_k x = \mathrm{i}x', x \in \mathfrak{D}(T_k), \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.3.11}$$

显然, T_k 是稠定的线性算子, 类似于例 3.1.7 可以证明 T_k 是闭的, 且

$$T_3 \subset T_2 \subset T_1, \tag{3.3.12}$$

由定理 3.2.2 知

$$T_1^* \subset T_2^* \subset T_3^*.$$

下面证明

$$T_1^* = T_3, \quad T_2^* = T_2, \quad T_3^* = T_1. \tag{3.3.13}$$

事实上, 对于任意的 $x(t) \in \mathfrak{D}(T_k)$, $y(t) \in \mathfrak{D}(T_m)$, $m + k = 4$, 由分部积分, 结合条件 $x(1)\overline{y(1)} = x(0)\overline{y(0)}$,

$$(T_k x, y) = \int_0^1 \mathrm{i}x'(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\overline{\mathrm{i}y'(t)}\,\mathrm{d}t = (x, T_m y).$$

有 $T_m \subset T_k^*$, 即

$$T_3 \subset T_1^*, \quad T_2 \subset T_2^*, \quad T_1 \subset T_3^*. \tag{3.3.14}$$

下面证明反过来的包含关系. 设 $y \in \mathfrak{D}(T_k^*), z = T_k^* y$. 令 $Z(t) = \displaystyle\int_0^t z(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 则对于 $x(t) \in \mathfrak{D}(T_k)$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{i}x'(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t &= (T_k x, y) = (x, T_k^* y) = (x, z)\\ &= \int_0^1 x(t)\overline{z(t)}\mathrm{d}t = x(1)\overline{Z(1)} - \int_0^1 x'(t)\overline{Z}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

当 $k = 1, 2$ 时, $\mathfrak{D}(T_k)$ 中均包括 $[0, 1]$ 上的非零常值函数, 即 $x(t) = c, x'(t) = 0$. (3.3.15) 意味着 $\overline{Z(1)} = 0$. 当 $k = 3$ 时, 有 $x(1) = 0$, 这样对于 $k = 1, 2, 3$ 都有

$$\mathrm{i}y + Z \in \mathcal{R}(T_k)^{\perp}. \tag{3.3.16}$$

因为 $\mathcal{R}(T_1) = L^2$, 所以当 $k = 1$ 时, $\mathrm{i}y(t) = -Z(t)$, y 是绝对连续的, $y' \in L^2$ 且 $y(1) = 0$, $y(0) = 0$, 于是 $y \in \mathfrak{D}(T_3)$, 即 $T_1^* \subset T_3$.

如果 $k = 2, 3$, $\mathcal{R}(T_k)$ 中包括了所有满足 $\displaystyle\int_0^1 u\,\mathrm{d}t = 0$ 的元素 u. 这样

$$\mathcal{R}(T_2) = \mathcal{R}(T_3) = Y^{\perp}, \tag{3.3.17}$$

其中 Y 是 L^2 中包括常值函数的一维子空间. 由 (3.3.16) 和 (3.3.17) 可推知 $\mathrm{i}y(t) + Z(t) = c$ (c 是常数).

从而当 $k=3$ 时, y 是绝对连续的, 并且 $y' \in L^2$, 即 $y \in \mathfrak{D}(T_1)$. 故 $T_3^* \subset T_1$.

当 $k=2$ 时, 条件 $Z(1)=0$ 成立, 由 $\mathrm{i}y(t)+Z(t)=c$ 推出 $y(1)=y(0)$, 于是 $y \in \mathfrak{D}(T_2)$, 有 $T_2^* \subset T_2$.

注 可以看到, T_3 是对称算子 ($T_3^* = T_1 \supset T_3$), T_1、T_2 是 T_3 的扩张, T_2 是自共轭的, 但 T_1 不是对称的. 进一步的结果可参阅习题 4.1 第 4 题.

后面将研究在一般情况下如何使对称算子扩张为自共轭算子 (如果可能).

习 题 3.3

1. 设 T 是 Hilbert 空间上的线性稠定对称算子, 证明:

(1) T 是闭的 $\Leftrightarrow T = T^{**} \subset T^*$;

(2) T 本质自共轭 $\Leftrightarrow T \subset T^{**} = T^*$;

(3) T 是自共轭的 $\Leftrightarrow T = T^{**} = T^*$.

2. 若自共轭线性算子 $T\colon \mathfrak{D}(T) \to H$ 是单射. 证明:

(1) $\overline{\mathcal{R}(T)} = H$;

(2) T^{-1} 是自共轭的.

3. 证明线性算子 T 是对称的当且仅当 T^* 是 T^{**} 的扩张.

4. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称线性算子. 如果存在完全由 T 的特征元素构成的标准正交基, 证明 T 是本质自轭的.

5. 考虑 $L^2[0,1]$ 上的微分算子 $T = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, 设 $\mathfrak{D}(T) = C_0^\infty[0,1]$, 证明:

(1) T 是稠定对称算子;

(2) T 不是闭算子, 但是可闭的.

6. 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的序列, 在 l^2 上定义闭算子 T:

$$\mathfrak{D}(T) = \{x = \{x_n\} \in l^2 \mid \{a_n x_n\} \in l^2\},$$

$$Tx = \{a_n x_n\}, \quad \forall x = \{x_n\} \in \mathfrak{D}(T).$$

(1) 证明 T 是自共轭的当且仅当序列 $\{a_n\}$ 是实的;

(2) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}, \sigma(T) = \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(T)}$;

(3) 对于 $z \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, 确定 $(z-T)^{-1}$.

7. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数, 定义 $f(Q)$,

$$f(Q)\colon u(x) \to f(x)u(x),$$

这里 $f(Q)$ 的定义域是 $\{u(x) \in L_2(-\infty,\infty) |\, f(x)u(x) \in L_2(-\infty,\infty)\}$.

(1) 证明 $f(Q)$ 是自共轭的;

(2) 若只假定 $f(x)$ 是连续的, $f(Q)$ 是否仍为自共轭的?

8. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的本质自共轭算子, $\mathfrak{D}(T)$ 是 T 的定义域, 证明对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, $(T-\lambda I)(\mathfrak{D}(T))$ 在 H 中稠.

9. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, 假定对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, $(T-\lambda I)(\mathfrak{D}(T))$ 和 $(T-\overline{\lambda} I)(\mathfrak{D}(T))$ 在 H 中稠. 证明 T 是本质自共轭的.

10. 设 S,T 是定义在公共定义域 D 上的线性算子, S 是对称的, T 是本质自共轭的, 假定存在 $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$ 和常数 K, 使得

$$\|Su\| \leqslant \varepsilon \|Tu\| + K\|u\|, \quad \forall u \in D.$$

证明 $S+T$ 是本质自共轭的.

11. 在习题 10 中, 若 T 在 D 上是自共轭的, 则 $S+T$ 在 D 上是自共轭的.

12. 设 S, T 是定义在公共定义域 D 上的线性算子, S 是对称的, T 是本质自共轭的. 假定存在非负常数 α 和 β, 使得

$$\|Su\|^2 \leqslant \alpha(u, Tu) + \beta\|u\|^2.$$

证明 $S+T$ 是本质自共轭算子.

13. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的 (本质) 自共轭算子, S 是对称算子, $\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(S)$, 且存在某个 $b<1$, 对于任意的 $f\in\mathfrak{D}(T)$, 都有 $\mathrm{Re}(Tf,Sf) \geqslant -(a\|f\|^2 + b\|Tf\|\,\|Sf\|)$, 则对 $\forall t\geqslant 0$, $T+tS$ 是 (本质) 自共轭的.

§3.4 对称算子的结构和亏指数

3.4.1 对称算子的值域和零空间

由前一节可知, 稠定的算子 T 是对称的, 当且仅当 $T\subset T^*$, 由于 T^* 是闭算子, 因此对称算子是可闭的, 并且 $\overline{T}$ 是最小闭扩张,

$$T\subset\overline{T}\subset T^* = \overline{T}^*. \tag{3.4.1}$$

如果 T 是自共轭的, 即 $T=T^*$, 则 T 没有非平凡的对称扩张. 事实上, 如果存在对称算子 S, 使得 $T\subset S$, 那么

$$T\subset S\subset S^*\subset T^* = T,$$

可知 $S=T$, 即自共轭算子是对称算子最大的对称扩张 (如果存在).

一般来说, 由于无界对称算子的定义域 $\mathfrak{D}(T)\neq H$. 对称算子和自共轭算子是不同的, 甚至于对称算子的最大对称扩张也不是自共轭算子. 同时可以注意到, 如果 T 是自共轭的, 并且 $\mathfrak{D}(T)=H$, 由定理 3.1.4, T 是有界线性算子. 因此对于无界线性算子 T, 它的最大对称扩张的定义域也不能是全空间 H. 所以确定一个算子在什么定义域中是对称的, 进一步地, 在什么定义域中是自共轭的, 是一个十分重要而且精细的问题.

由于自共轭算子是闭的, 我们从值域 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 和 $\mathcal{R}(T-\overline{\lambda} I)$ 入手研究什么条件下对称算子 T 是自共轭的.

定理 3.4.1 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, 则零空间

$$\mathcal{N}(T \pm \mathrm{i}I) = \{0\}. \tag{3.4.2}$$

证明 由

$$\begin{aligned} &\|(T \pm \mathrm{i}I)x\|^2 = ((T \pm \mathrm{i}I)x, (T \pm \mathrm{i}I)x) \\ =& (Tx, Tx) \pm (Tx, \mathrm{i}x) \pm (\mathrm{i}x, Tx) + (\mathrm{i}x, \mathrm{i}x) = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

可推知. □

定理 3.4.2 设 T 是 Hilbert 空间中的闭对称算子, 则像空间 $\mathcal{R}(T \pm \mathrm{i}I)$ 是闭的.

证明 对于 $\forall y \in \overline{\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)}$, 存在 $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $(T + \mathrm{i}I)x_n = y_n \to y$, 由 (3.4.3) 知, $\{x_n\}$ 是 Hilbert 空间中的 Cauchy 列, 于是存在 $x \in H$, $x_n \to x$. 由于 $T + \mathrm{i}I$ 是闭的, 可知 $x \in \mathfrak{D}(T + \mathrm{i}I), y = (T + \mathrm{i}I)x$, 即 $y \in \mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$. 同理可证 $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$ 是闭的. □

定理 3.4.3 T 是 Hilbert 空间 H 中稠定的线性算子, 则

$$\mathcal{N}(T^* \pm \mathrm{i}I) = \mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I)^{\perp}. \tag{3.4.4}$$

证明 设 $y \in \mathcal{N}(T^* \pm \mathrm{i}I)$, 则 $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 且

$$((T \mp \mathrm{i}I)x, y) = (x, (T^* \pm \mathrm{i}I)y) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T), \tag{3.4.5}$$

即 $y \in \mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I)^{\perp}$. 反之, 设 $y \in \mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I)^{\perp}$, 则对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $((T \mp \mathrm{i}I)x, y) = 0$, 即 $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 且对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $(x, (T^* \pm \mathrm{i}I)y) = 0$, 由于 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中稠, 推知 $(T^* \pm \mathrm{i}I)y = 0$, 即 $y \in \mathcal{N}(T^* \pm \mathrm{i}I)$. □

注 定理 3.4.3 是定理 3.2.5 的特例. 特别地, 如果 $\mathcal{N}(T^* \pm \mathrm{i}I) = \{0\}$, 则 $\overline{\mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I)} = H$.

定理 3.4.4 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的对称线性算子, 则

(1) T 是自共轭的, 当且仅当

$$\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I) = \mathcal{R}(T + \mathrm{i}I) = H; \tag{3.4.6}$$

(2) T 是本质自共轭的, 当且仅当

$$\overline{\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)} = \overline{\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)} = H. \tag{3.4.7}$$

证明 (1) T 是自共轭的, $T = T^*$, 由定理 3.4.1, $\mathcal{N}(T \pm \mathrm{i}I) = \{0\}$, 根据定理 3.4.2, $\mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I)$ 是闭的, 由定理 3.4.3, $\mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I) = H$. 反之, 如果 $\mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I) = H$. 因为 $T \subset T^*$,

$$\mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I) = \mathcal{R}(T^* \mp \mathrm{i}I) = H, \tag{3.4.8}$$

且由定理 3.4.3 推出

$$\mathcal{N}(T^* \pm \mathrm{i}I) = \{0\}. \tag{3.4.9}$$

这样, 对于 $u \in \mathfrak{D}(T^*)$, 由 (3.4.8) 知, 存在 $v \in \mathfrak{D}(T)$, 使得

$$(T^* + \mathrm{i}I)u = (T + \mathrm{i}I)v.$$

再由 $T \subset T^*$, 知 $(T^* + \mathrm{i}I)(u - v) = 0$. 结合 (3.4.9) 推知 $u = v \in \mathfrak{D}(T)$, 即 $T = T^*$.

(2) 从定理 3.3.6 知 T 是本质自共轭的, 则 $\overline{T} = T^*$ 是对称的, 结合定理 3.4.3 和定理 3.4.1 有 $\overline{\mathcal{R}(T \mp \mathrm{i}I)} = \mathcal{N}(T^* \pm \mathrm{i}I)^{\perp} = \mathcal{N}(\overline{T} \pm \mathrm{i}I)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. □

由定理 3.4.3 和定理 3.4.4, 有

定理 3.4.5　设 T 是 Hilbert 空间 H 中的对称算子, 则

(1) T 是自共轭的, 当且仅当 T 是闭算子, 且

$$\mathcal{N}(T + \mathrm{i}I) = \mathcal{N}(T - \mathrm{i}I) = \{0\}; \tag{3.4.10}$$

(2) T 是本质自共轭的, 当且仅当

$$\mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I) = \mathcal{N}(T^* - \mathrm{i}I) = \{0\}. \tag{3.4.11}$$

注　由于 T 是对称的, 可知对于任意的实数 α, $T - \alpha I$ 也是自共轭的, 从 (3.4.3) 的证明中可知 $\|(T \pm \mathrm{i}bI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + |b|^2\|x\|^2$. 于是定理 3.4.2~ 定理 3.4.5 中的 i 可以换成是复数 λ, $-\mathrm{i}$ 换成 $\overline{\lambda}$, 只要它的虚部 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, 其结论依然成立.

进一步, 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 还可以有

定理 3.4.6　设 T 是 Hilbert 空间 H 中的对称算子, 并且 $\mathcal{R}(T - \lambda I) = H$, 其中 λ 是一个实数. 那么 T 是自共轭算子.

证明　因为 $\mathcal{R}(T - \lambda I) = H$, 于是对于 $\forall u \in \mathfrak{D}(T^*)$, 存在 $v \in \mathfrak{D}(T)$, 使得

$$(T - \lambda I)v = (T^* - \lambda I)u.$$

由于 $T \subset T^*$, 于是 $(T^* - \lambda I)(u - v) = 0$. 由定理 3.2.5, $\mathcal{N}(T^* - \lambda I) = \{0\}$, 即 $u = v$, $T = T^*$. □

3.4.2　共轭算子定义域的结构

为研究对称算子的对称扩张, 我们给出 T^* 定义域 $\mathfrak{D}(T^*)$ 的一个分解形式.

定理 3.4.7　设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是一个闭的对称算子, 则 $\mathfrak{D}(T^*)$ 有如下的直和分解:

$$\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(T) \dot{+} \mathcal{N}(T^* - \mathrm{i}I) \dot{+} \mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I). \tag{3.4.12}$$

证明 令 $D_+ = \mathcal{N}(T^* - \mathrm{i}I)$, $D_- = \mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I)$. 显然 $\mathfrak{D}(T)$、D_+、D_- 是线性子空间, 我们要证明 $\mathfrak{D}(T)$, D_+, D_- 是线性无关的子空间. 假如不然, 存在 $x_0 \in \mathfrak{D}(T), x_+ \in D_+, x_- \in D_-$, 使得 $x_0 + x_+ + x_- = 0$, 两边同时作用 $T^* - \mathrm{i}I$, 得

$$(T - \mathrm{i}I)\, x_0 + 0 + (T^* - \mathrm{i}I)\, x_- = 0,$$

即

$$(T - \mathrm{i}I)\, x_0 = 2\mathrm{i}x_-. \tag{3.4.13}$$

根据定理 3.4.3, 由于 $x_- \in D_- = \mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)^\perp$, 再由 (3.4.13),

$$((T - \mathrm{i}I)x_0, x_-) = (2\mathrm{i}x_-, x_-) = 0,$$

即 $x_- = 0$. 同理可推出 $x_+ = 0$, 从而 $x_0 = 0$, 即 $\mathfrak{D}(T)$, D_+, D_- 是线性无关的子空间.

$\mathfrak{D}(T) + D_+ + D_- \subset \mathfrak{D}(T^*)$ 是显然的. 只需证明 $\mathfrak{D}(T^*) \subset \mathfrak{D}(T) + D_+ + D_-$. 由定理 3.4.2 和定理 3.4.3, $H = \mathcal{R}(T - \mathrm{i}I) \oplus D_-$. 于是对于任意的 $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, 令 $y = (T^* - \mathrm{i}I)x \in H$ 有分解 $y = y_1 + y_2$, 其中 $y_1 \in \mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$, $y_2 \in D_-$. 令 $x_- = -\dfrac{1}{2\mathrm{i}}y_2$, 由于 D_- 是子空间, $x_- \in D_-$. 再令 $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$, 使得 $(T - \mathrm{i}I)x_0 = y_1$. 于是

$$y = y_1 + y_2 = (T - \mathrm{i}I)x_0 - 2\mathrm{i}x_- = (T^* - \mathrm{i}I)(x_0 + x_-),$$

即 $(T^* - \mathrm{i}I)(x - x_0 - x_-) = 0$. 令 $x_+ = x - x_0 - x_- \in D_+$, 有

$$x = x_0 + x_+ + x_-,$$

推出 $\mathfrak{D}(T^*) \subset \mathfrak{D}(T) + D_+ + D_-$. □

推论 3.4.8 (Neumann 公式) 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是一个闭的对称算子, 对于 $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, x 可以写成 $x = x_0 + x_+ + x_-$, 其中 $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$, $x_+ \in D_+$, $x_- \in D_-$, 且

$$\begin{aligned} &T^*x = Tx_0 + \mathrm{i}x_+ - \mathrm{i}x_-, \\ &\mathrm{Im}(T^*x, x) = \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

注 推论的结论可由直接计算得出. 同定理 3.4.5 的注, 上述定理中的 i 可以换为 λ, $-\mathrm{i}$ 可以换为 (虚部 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$), 结论同样成立, 即

$$\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(T)\dot{+}\mathcal{N}(T^* - \lambda I)\dot{+}\mathcal{N}(T^* - \overline{\lambda}I), \tag{3.4.15}$$

$$T^*x = Tx_0 + \lambda x_+ + \overline{\lambda}x_-. \tag{3.4.16}$$

3.4.3 对称线性算子的亏指数

定义 3.4.9 设 H 是一个 Hilbert 空间. T 是 H 上的闭对称线性算子, 记

$$n_+ = \dim \mathcal{N}(T^* - \mathrm{i}I),\ \ n_- = \dim \mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I). \tag{3.4.17}$$

称 (n_+, n_-) 为 T 的亏指数, 记为 $d(T)$.

注 $n_\pm$ 可以取 ∞.

当 T 是自共轭的, $T = T^*$, 由定理 3.4.7, $\mathfrak{D}(T^*)$ 的构造, 我们立即有

定理 3.4.10 闭对称算子 T 是自共轭的, 当且仅当 $d(T) = (0, 0)$.

注 一个对称算子 T 是本质自共轭的, 当且仅当它的亏指数 $d(T) = (0, 0)$.

事实上, $n_\pm$ 仅与 λ 在上下平面的位置有关, 与 λ 的值无关. 为证明这一事实, 首先证明如下引理.

引理 3.4.11 设 M, N 是 Hilbert 空间中的子空间, 若 $\dim M > \dim N$, 则存在 $u \in M$, $\|u\| = 1$, 使得 $u \in N^\perp$.

证明 我们证明其逆反命题, 即如果不存在 $u \in M$, $\|u\| = 1$ 且 $u \in N^\perp$, 则 $\dim M \leqslant \dim N$. 如果 $\dim N = \infty$, 命题自然成立. 如果 $\dim N < \infty$, 不妨设 $\dim N = m$, 如果 $\dim M \leqslant \dim N$ 不成立, 则 $\dim M \geqslant m + 1$, 于是存在线性无关的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1} \in M$. 由定理 1.1.33, $H = N \oplus N^\perp$. 由于 $x_i \notin N^\perp$ $(i = 1, 2, \cdots, m+1)$, x_i 可表示为

$$x_i = y_i + z_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m+1,$$

其中 $y_i \in N$, $z_i \in N^\perp$, 且 $y_i \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, m+1)$. 由于 $\dim N = m$, 所以存在不全为零的常数 $c_1, \cdots, c_{m+1}$, 使得

$$c_1 y_1 + \cdots + c_{m+1} y_{m+1} = 0.$$

因此

$$0 \neq c_1 x_1 + \cdots + c_{m+1} x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} c_i z_i \in N^\perp.$$

矛盾. 命题得证. □

定理 3.4.12 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的闭线性算子, 对于 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ 有

$$n_+ = \dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I), \tag{3.4.18}$$

$$n_- = \dim \mathcal{N}(T^* - \overline{\lambda} I), \tag{3.4.19}$$

其中 $(n_+, n_-) = d(T)$.

证明 只需证明当 $|\lambda'| \leqslant \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}\lambda|$ 时,

$$\dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I) = \dim \mathcal{N}(T^* - (\lambda + \lambda')I).$$

设 $\lambda = a + b\mathrm{i}$, $b \neq 0$. 由 T 对称, 有

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 \geqslant |b|^2 \|u\|^2. \tag{3.4.20}$$

任取 $x \in \mathcal{N}(T^* - (\lambda + \lambda')I)$, $\|x\| = 1$. 如果 $x \in \mathcal{N}(T^* - \lambda I)^\perp = \mathcal{R}(T - \overline{\lambda} I)$, 则存在 $u \in \mathfrak{D}(T)$, $(T - \overline{\lambda} I)u = x$, 由 (3.4.20) 知

$$\|x\| \geqslant |b|\,\|u\|, \tag{3.4.21}$$

同时

$$0 = ((T^* - (\lambda + \lambda')I)x, u) = (x, (T - \overline{\lambda} I)u) - \overline{\lambda'}(x, u) = \|x\|^2 - \overline{\lambda'}(x, u). \tag{3.4.22}$$

在上式中, 可选取 λ', 使得

$$0 = \|x\|^2 - \overline{\lambda'}(x, u) = \|x\|^2 - |\lambda'|\,|(x, u)|,$$

即 $\|x\|^2 = |\lambda'|\,|(x, u)|$, 于是当 $|\lambda'| < |b|$ 时,

$$\|x\| < |b|\,\|u\|. \tag{3.4.23}$$

(3.4.21) 和 (3.4.23) 矛盾, 即

$$x \in \mathcal{N}(T^* - (\lambda + \lambda')I) \Rightarrow x \notin \mathcal{N}(T^* - \lambda I)^\perp. \tag{3.4.24}$$

由引理 3.4.11 知

$$\dim \mathcal{N}(T^* - (\lambda + \lambda')I) \leqslant \dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I).$$

同样我们可以有, 当 $|\lambda| \leqslant \dfrac{|b|}{2}$ 时,

$$\dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I) \leqslant \dim \mathcal{N}(T^* - (\lambda + \lambda')I),$$

即 $|\lambda'| \leqslant \dfrac{|b|}{2}$ 时,

$$\dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I) = \dim \mathcal{N}(T^* - (\lambda + \lambda')I). \qquad \square$$

习　题　3.4

1. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子.

(1) 若对某个 $s \in \mathbb{R}$, $H = \overline{\mathcal{N}(s-T)} + \mathcal{R}(s-T)$, 则 T 是可闭的, 且有

$$\mathcal{N}(s-\overline{T}) = \overline{\mathcal{N}(s-T)}, \quad \mathcal{R}(s-\overline{T}) = \mathcal{R}(s-T);$$

(2) 若对某个 $s \in \mathbb{R}$, $s-T$ 是连续可逆的, 且 $\overline{\mathcal{R}(s-T)} = H$, 则 T 是本质自共轭的.

2. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, 定义域为 D, 设 $D_1 \subset D$, D_1 是稠密的线性子空间, 记 $T|_{D_1}$ 为算子 T 在 D_1 上的限制. 若 $T|_{D_1}$ 是本质自共轭的, 证明 T 是本自共轭的, 且 $\overline{T} = \overline{T|_{D_1}}$.

3. 在 $L^2[0,\infty)$ 中定义算子 $Tu = \mathrm{i}u'$, $\mathfrak{D}(T) = C_0^\infty[0,\infty)$, T 是本质自共轭算子吗?

4. 设 T 是稠定对称算子, 且是正的, 即 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $(Tx,x) \geqslant 0$, 证明

(1) $\|(T+I)x\|^2 \geqslant \|x\|^2 + \|Tx\|^2$;

(2) T 是闭算子当且仅当 $\mathcal{R}(T+I)$ 是闭集;

(3) T 是本质自共轭的当且仅当 $T^*y = -y$ 无非零解.

5. 设 $H = l^2$, 令

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ a \in l^2 \big| \exists N, \text{ 使得当 } n > N, a_n = 0 \text{ 且 } \sum_{j=0}^{N} a_j = 0 \right\}.$$

$$(Ta)_n = \mathrm{i}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j + \sum_{j=0}^{n} a_j \right), \quad \forall a \in \mathfrak{D}(T).$$

证明 (1) T 是稠定对称的;

(2) $\mathcal{R}(T+\mathrm{i})$ 在 l^2 中稠密;

(3) $(1,0,0,\cdots) \in \mathfrak{D}(T^*)$ 且 $(T^*+\mathrm{i})(1,0,0,\cdots) = 0$.

6. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上稠定闭算子, 证明 $\forall a, b \in H$, 方程组

$$\begin{cases} -Tx + y = a, \\ x + T^*y = b \end{cases}$$

有唯一解 $x \in \mathfrak{D}(T)$, $y \in \mathfrak{D}(T^*)$.

7. 考虑 $L^2(\mathbb{R}^1)$ 上算子 $Tx = \mathrm{i}x'$, $\mathfrak{D}(T) = \{x \in L^2(\mathbb{R}^1) | x \text{ 绝对连续}, x' \in L^2(\mathbb{R}^1)\}$, 证明 T 是自共轭算子.

8. 设 $D = \{x \in L^2(0,\infty) | \forall c > 0,\ x \text{ 在 } [0,c] \text{ 上绝对连续},\ x(0) = 0, x' \in L^2(0,\infty)\}$, 定义 $Tx = \mathrm{i}x'$, $\forall x \in D$. 证明

(1) T 是稠定闭算子, 并找出 T^* 的定义域;

(2) T 是对称算子, 且亏指数 $n_+ = 0$, $n_- = 1$.

9. 设

$$D = \{x \in L^2(-\infty,0) | \forall c < 0, x\text{在}[c,0]\text{上绝对连续}, x(0) = 0,\ x' \in L^2(-\infty,0)\}.$$

定义 $Tx = \mathrm{i}x'$, $\forall x \in D$. 证明

(1) T 是稠定闭算子, 并找出 T^* 的定义域;

(2) T 是对称算子, 亏指数 $n_+ = 1$, $n_- = 0$.

10. 若 k, l 是任意非负整数或 ∞, 证明存在闭算子 T, 使得其亏指数 $n_+ = k, n_- = l$. (提示: 利用习题 8 和习题 9.)

11. 设 T_n 是 Hilbert 空间 $H_n(n = 1, 2, \cdots)$ 上的对称算子. 设

$$D = \left\{ u = (u_1, u_2, \cdots) \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n \middle| u_n \in \mathfrak{D}(T_n), \text{只有有穷个 } u_n \text{ 不等于零} \right\},$$

证明 (1) $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ 在 D 上对称;

(2) $n_\pm(T) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n_\pm(T_n)$.

12. 设 $p(x)$ 是实系数多项式, 令 $H = L^2[0, \infty)$, 定义算子 $T = p\left(\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right), \mathfrak{D}(T) = C_0^\infty(0, \infty)$, 证明

(1) T 是对称算子;

(2) 若 $p(x)$ 无奇次幂项, 则 T 的亏指数相同;

(3) 若 $p(x)$ 是奇次多项式, 则 T 的亏指数不相同.

§3.5 Cayley 变换和对称算子的自共轭扩张

3.5.1 Cayley 变换

当 T 是对称算子但不是自共轭算子时, $\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(T^*)$, 但 $\mathfrak{D}(T) \neq \mathfrak{D}(T^*)$, 这说明有可能通过扩大 $\mathfrak{D}(T)$ 使其扩张成为自共轭的, 我们通过 Cayley 变换来研究这个问题.

定义 3.5.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是 H 上的对称线性算子, 令

$$V = (T - \mathrm{i}I)(T + \mathrm{i}I)^{-1}, \tag{3.5.1}$$

V 称为 T 的 Cayley 变换.

注 由定理 3.4.1 知 $(T + \mathrm{i}I)^{-1}$ 存在, 显然 V 是从 $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ 上到 $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$ 上的满映射.

定理 3.5.2 设 V 是如上定义的 Cayley 变换, 则 V 是从 $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ 上到 $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$ 上的等距算子.

证明 对于 $\forall y \in \mathfrak{D}(V) = \mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$, 存在 $x \in \mathfrak{D}(T)$, 使得 $y = (T + \mathrm{i}I)x$, 即 $x = (T + \mathrm{i}I)^{-1}y$. 于是由 (3.5.1),

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2 &= \| (T - \mathrm{i}I)(T + \mathrm{i}I)^{-1}y \|^2 = \| (T - \mathrm{i}I)x \|^2 \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 = \| (T + \mathrm{i}I)x \|^2 = \|y\|^2,\end{aligned}$$

即 V 是等距算子. □

另一方面, T 也可以由 Cayley 变换 V 表示出来.

定理 3.5.3 设 V 是对称算子 T 的 Cayley 变换, 则 $1 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(V)$, $\mathcal{R}(I - V) = \mathfrak{D}(T)$, 且

$$T = \mathrm{i}(I + V)(I - V)^{-1}. \tag{3.5.2}$$

证明 由于 $y = (T + \mathrm{i}I)x$, $Vy = (T - \mathrm{i}I)x$, 由此可推出

$$Tx = \frac{1}{2}(I + V)y, \tag{3.5.3}$$

$$x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(I - V)y. \tag{3.5.4}$$

注意到 $\mathcal{N}(T + \mathrm{i}I) = \{0\}$, x 和 y 之间是一一对应的, 因此 $(I - V)^{-1}$ 存在, $1 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(V)$, 且 $\mathcal{R}(I - V) = \mathfrak{D}(T)$, 于是有 $Tx = \mathrm{i}(I + V)(I - V)^{-1}x$. □

定理 3.5.4 设 H 是 Hilbert 空间, 线性算子 V 是对称算子 T 的 Cayley 变换当且仅当

(1) V 是从 $\mathfrak{D}(V)$ 到 $\mathcal{R}(V)$ 的等距线性算子;

(2) $\mathcal{R}(I - V)$ 在 H 中是稠密的, 且对称算子 $T = \mathrm{i}(I + V)(I - V)^{-1}$.

证明 必要性在定理 3.5.3 中已证. 如果 V 是满足 (1)、(2) 的算子, 由于 $\mathcal{R}(I - V)$ 稠, 可以证明 $I - V$ 是一一的, 即 $1 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(V)$. 事实上, 如果存在 $z \in H, (I - V)z = 0$, 那么对于 $\forall y \in \mathfrak{D}(V)$,

$$(z, (I - V)y) = (z, y) - (z, Vy) = (z, y) - (Vz, Vy) = 0,$$

即 $z \perp \mathcal{R}(I - V)$, $z = 0$. 由此可以定义

$$T = \mathrm{i}(I + V)(I - V)^{-1}.$$

由 (2) 知, $\mathfrak{D}(T) = \mathcal{R}(I - V)$ 是稠的. 对于 $\forall x, y \in \mathfrak{D}(T)$, 存在 $x_1, y_1 \in \mathfrak{D}(V)$, 使得

$$x = (I - V)x_1, \quad y = (I - V)y_1,$$

于是

$$\begin{aligned}(Tx,y)=&\mathrm{i}((I+V)(I-V)^{-1}x,y)=\mathrm{i}((I+V)x_1,(I-V)y_1)\\ =&\mathrm{i}\{(x_1,y_1)+(Vx_1,y_1)-(x_1,Vy_1)-(Vx_1,Vy_1)\}\\ =&\mathrm{i}\{(Vx_1,Vy_1)+(Vx_1,y_1)-(x_1,Vy_1)-(x_1,y_1)\}\\ =&-\mathrm{i}((I-V)x_1,(I+V)y_1)=-\mathrm{i}(x,(I+V)(I-V)^{-1}y)=(x,Ty),\end{aligned}$$

即 T 是对称的. 以下证明 V 是 T 的 Cayley 变换. 因为

$$T-\mathrm{i}I=\mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}-\mathrm{i}I=\mathrm{i}[(I+V)-(I-V)](I-V)^{-1}=2\mathrm{i}V(I-V)^{-1}, \quad (3.5.5)$$

$$T+\mathrm{i}I=\mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}+\mathrm{i}I=\mathrm{i}[(I+V)+(I-V)](I-V)^{-1}=2\mathrm{i}(I-V)^{-1}. \quad (3.5.6)$$

由 (3.5.5) 得

$$V=\frac{1}{2\mathrm{i}}(T-\mathrm{i}I)(I-V).$$

再由 (3.5.6) 得

$$V=(T-\mathrm{i}I)(T+\mathrm{i}I)^{-1}.$$

V 是 T 的 Cayley 变换. □

注 以上定理说明, Hilbert 空间 H 中的对称线性算子 T 和 H 中的值域稠密的等距算子是一一对应的.

定理 3.5.5 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的对称线性算子, V 是 T 的 Cayley 变换, 则 T 是闭的线性算子当且仅当 V 是闭的线性算子. 进一步地, 当 T 是自共轭算子时, V 是酉算子.

证明 设 T 是闭算子, 令 $y_n\in\mathfrak{D}(V)$, $y_n\to y$. 由于 $\mathfrak{D}(V)=\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)$, 则存在 $x_n\in\mathfrak{D}(T)$, $y_n=(T+\mathrm{i}I)x_n$. 因为 V 是等距算子, $\{Vy_n\}$ 也收敛, 即存在 z 使得

$$Vy_n=(T-\mathrm{i}I)x_n\to z\quad(n\to\infty).$$

结合 (3.5.3) 和 (3.5.4) 推知

$$\begin{aligned}x_n=&\frac{1}{2\mathrm{i}}(I-V)y_n\to\frac{1}{2\mathrm{i}}(y-z)=x,\\ Tx_n=&\frac{1}{2}(I+V)y_n\to\frac{1}{2}(y+z).\end{aligned}\quad (3.5.7)$$

由于 T 是闭算子, 有

$$x\in\mathfrak{D}(T),\quad Tx=\frac{1}{2}(y+z), \quad (3.5.8)$$

结合 (3.5.7) 有

$$y=(T+\mathrm{i}I)x,\quad z=(T-\mathrm{i}I)x,$$

即 $y \in \mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)=\mathfrak{D}(V)$, 且 $z=(T-\mathrm{i}I)(T+\mathrm{i}I)^{-1}y=Vy$, 这证明 V 是闭算子.

采用类似的方法. 可以由 V 是闭的, 推出 T 是闭的.

如果 T 是自共轭的, 由定理 3.4.4, $\mathcal{R}(T\pm\mathrm{i}I)=H$. V 的定义域 $\mathfrak{D}(V)=H$, 值域 $\mathcal{R}(V)=H$, 即 V 是酉算子. □

定理 3.5.6　设 T 是 Hilbert 空间 H 中闭的对称算子, V 是 T 的 Cayley 变换, 则 $1\in\rho(V)$ 当且仅当 T 是有界自共轭的.

证明　由于 $T=\mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}$, 若 $1\in\rho(V)$, $(I-V)^{-1}$ 有界且定义在全空间上, 则 T 有界且 V 是酉算子, 即 T 是自共轭的. 反之, 由 T 是有界自共轭的, 则 V 是酉算子, 对于 $\forall y\in\mathfrak{D}(V)$, 存在 x, 使得 $(T+\mathrm{i}I)x=y$, 有

$$\|y\|\leqslant(\|T\|+1)\|x\|,$$

结合 (3.5.4), 有 $(I-V)^{-1}$ 有界且定义在全空间上, $1\in\rho(V)$. □

3.5.2　对称算子的对称扩张

从上述定理可以看到, 一个对称算子有一个确定的 Cayley 变换与之对应, 并且有

定理 3.5.7　设 T_1, T_2 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, V_1 和 V_2 是它们的 Cayley 变换. 那么 $T_1\subset T_2$ 当且仅当 $V_1\subset V_2$.

注　因此对称算子 T 的对称扩张问题可以转变为它的 Cayley 变换 V 的等距扩张, 只要我们得到 V 的所有等距扩张, 即可以从 (3.5.2) 得到相应的 T 的所有对称扩张. 特别地, 当 V 等距扩张到全空间成为酉算子时 (如果可能), T 扩张为自轭算子.

由于对称算子 T 是可闭的, 不失一般性, 我们可以考虑闭的对称算子. 由于 $\mathfrak{D}(V)=\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)=\mathcal{N}(T^*-\mathrm{i}I)^{\perp}$, $\mathcal{R}(V)=\mathcal{R}(T-\mathrm{i}I)=\mathcal{N}(T^*+\mathrm{i}I)^{\perp}$, 于是 V 是否存在等距扩张的问题转化为是否存在从 $\mathcal{N}(T^*-\mathrm{i}I)$ 到 $\mathcal{N}(T^*+\mathrm{i}I)$ 上的等距算子. 我们有

定理 3.5.8　设 T 是 Hilbert 空间 H 中的闭对称算子, T 有自共轭扩张, 当且仅当 $n_+=n_-$, 其中 $(n_+,n_-)=d(T)$, 即上下亏指数相等.

定理 3.5.9　设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是闭的对称算子, $d(T)=(n,n)$, 则 T 的任何一个自共轭扩张 T', 对应着唯一确定的从 D_+ 到 D_- 的等距在上的线性算子 V', 使得

$$\mathfrak{D}(T')=\{x'=x+z-V'z\,|\,x\in\mathfrak{D}(T)\ ,z\in D_+\},\tag{3.5.9}$$

$$T'x'=Tx+\mathrm{i}z-\mathrm{i}V'z,\tag{3.5.10}$$

并且 T' 的 Cayley 变换为 $U=V\oplus V'$, 其中 V 为 T 的 Cayley 变换.

注 $\oplus$ 意味着算子的直和, 即 $H=\mathcal{R}(T+\mathrm{i}I)\oplus\mathcal{N}(T^*-\mathrm{i}I)=\mathfrak{D}(V)\oplus D_+$, V 和 V' 分别是 $\mathfrak{D}(V)$ 和 D_+ 上的等距线性算子, 定义为: $U\big|_{\mathfrak{D}(V)}=V$, $U\big|_{D_+}=V'$, 即

$$Ux=Vx_0+V'x_1,\quad \forall x=x_0+x_1,\quad x_0\in\mathfrak{D}(V),\ x_1\in D_+.$$

证明 设 $x'\in\mathfrak{D}(T')$, 则存在 $y'\in\mathfrak{D}(U)$, 由 (3.5.4) 和 (3.5.3) 有

$$x'=\frac{1}{2\mathrm{i}}(I-U)y', \tag{3.5.11}$$

$$Tx'=\frac{1}{2}(I+U)y'. \tag{3.5.12}$$

因为 $H=\mathfrak{D}(V)+D_+$, $y'=y+z'$, 其中 $y\in\mathfrak{D}(V)$, $z'\in D_+$, $U\big|_{D_+}=V'$, $U\big|_{\mathfrak{D}(V)}=V$. 由于 $y\in\mathfrak{D}(V)$, 于是存在 $x\in\mathfrak{D}(T)$, 使得

$$y=(T+\mathrm{i}I)x,\quad Vy=(T-\mathrm{i}I)x.$$

另一方面, 由 $y'=y+z'$, $Uy'=Vy+V'z'$. 由 (3.5.11),

$$\begin{aligned}x'=&\frac{1}{2\mathrm{i}}(I-U)y'=\frac{1}{2\mathrm{i}}(y'-Vy-V'z')\\=&\frac{1}{2\mathrm{i}}(y+z'-Vy-V'z')=\frac{1}{2\mathrm{i}}((I-V)y+z'-V'z').\end{aligned}$$

结合 (3.5.4),

$$x'=x+\frac{1}{2\mathrm{i}}z'-\frac{1}{2\mathrm{i}}V'z'.$$

令 $z=\frac{1}{2\mathrm{i}}z'\in D_+$, 有

$$x'=x+z-V'z.$$

由于 $z\in D_+$, $Tz=\mathrm{i}z$, 有

$$T'x'=Tx+\mathrm{i}z-\mathrm{i}V'z.$$

□

注 1 类似于定理的证明同样可以得到, 对称算子 T 的任何闭对称扩张 T' 是由以 D_+ 的某个闭子空间 M 为定义域, 以 D_- 的某个闭子空间 N 为值域的等距算子 V' 确定的, 且

$$x'=x+z-V'z,\quad x\in\mathfrak{D}(T), z\in M\subset D_+,$$

$$T'x'=Tx+\mathrm{i}z-\mathrm{i}V'z.$$

反之, 这样的算子 V' 确定了算子 T 的某个闭对称扩张 T'.

定理给出的是 $d(T)=(n,n)$ 且 $M=D_+$, $N=D_-$ 的特殊情况.

注 2　由此也可以看到

(1) T 是自共轭的, 当且仅当 $d(T)=(0,0)$;

(2) T 是最大的对称扩张, 当且仅当 T 的亏指数至少有一个等于零;

(3) T 有自共轭扩张, 当且 T 的两个亏指数相等.

例 3.5.10　在例 3.3.9 中 T_3 是对称算子, T_2 是它的自共轭扩张, 即 $T_3 \subset T_2$, $T_2=T_2^*$. 如何给出 T_3 的所有自共轭扩张, 由定理 3.5.9 可知, 关键是确定从 D_+ 到 D_- 的等距映射 V'. 我们知道 $D_\pm=\mathcal{N}(T^*\mp \mathrm{i}I)=\{x\in H\,|\mathrm{i}x'=\pm \mathrm{i}x\}$, 即 $D_\pm=\{\alpha \mathrm{e}^{\pm t},\ \alpha\in\mathbb{C}\}$, 因此 $n_\pm=1$. 从 D_+ 到 D_- 的等距映射有如下形式:

$$V'\mathrm{e}^t=\beta\mathrm{e}^{-t},\quad |\beta|=\mathrm{e}.$$

因此 T_3 的所有自共轭扩张有如下形式:

$$\mathfrak{D}(T')=\left\{x+\alpha\mathrm{e}^t-\alpha\beta\mathrm{e}^{-t}\middle|x\in\mathfrak{D}(T_3),\ |\beta|=\mathrm{e},\alpha\in\mathbb{C}\right\},\tag{3.5.13}$$

$$T'=\mathrm{i}x'+\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^t-\mathrm{i}\alpha\beta\mathrm{e}^{-t}.\tag{3.5.14}$$

可以验证, 例 3.3.9 中的 T_2 是其中 $\beta=-\mathrm{e}$ 的情况.

例 3.5.11　对称算子 T 的两个亏指数是可能不相等的.

我们在 $H=l^2[1,\infty)$ 上定义的右移算子 V: $l^2\to l^2$,

$$V:\ (x_1,x_2,\cdots)\to(0,x_1,x_2,\cdots)$$

(参阅例 2.1.6、例 2.1.7 注 3). V 是等距映射, 并且 $\mathcal{R}(I-V)$ 是稠密的, $I-V$ 是一一的, 即 V 是某个对称算子 T 的 Cayley 变换. 由于 $\mathfrak{D}(V)=l^2$, $\mathcal{R}(V)$ 的补维数是 1 , 即 T 的亏指数分别为 0 和 1 , 这说明 T 是一个稠定的、最大的对称算子, 但它不是自共轭的 (参阅本节习题 6).

习　题　3.5

1. 设 V 是自共轭算子 T 的 Cayley 变换, 假定 T^{-1} 存在且是稠定的. 证明

(1) T^{-1} 是对称的;

(2) T^{-1} 的 Cayley 变换是 $-V^{-1}$;

(3) T^{-1} 是自共轭的.

2. 设 $T:\mathfrak{D}(T)\to H$ 是对称算子, V 是 T 的 Cayley 变换.

(1) 证明 $\|(T+\mathrm{i}I)x\|=\|(T-\mathrm{i}I)x\|\geqslant\|x\|$, $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$;

(2) 设 $\mathfrak{D}(V)$ 表示 $\{y=(T+\mathrm{i}I)x|x\in\mathfrak{D}(T)\}$ 的闭包, 证明对于 $y=(T+\mathrm{i}I)x\in\mathfrak{D}(V)$, 有 $Vy=(T-\mathrm{i}I)x$;

(3) 证明 $\|Vy\|=\|y\|$, $\forall y\in\mathfrak{D}(V)$.

3. 令 T: $\mathfrak{D}(T) \to H$ 是对称算子, V 是 T 的 Cayley 变换, 假定 V 是酉算子, $\mathfrak{D}(V) = H$, $\mathcal{R}(V) = H$. 设 $x \in \mathfrak{D}(T^*)$, $x^* = Tx$. 证明

(1) $x = (I - V)\dfrac{x - \mathrm{i}x^*}{2}, x^* = \mathrm{i}(I + V)\dfrac{x - \mathrm{i}x^*}{2}$;

(2) $x \in \mathfrak{D}(T)$, $x^* = Tx$.

4. 令 $H = \left\{f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n, |z| < 1 \,\Big|\, \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty\right\}$. H 是一个 Hilbert 空间, 相应范数为 $\|f\| = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 在 H 上定义算子 U 和 T 如下:

$$(Uf)(z) = zf(z),$$
$$(Tf)(z) = \mathrm{i}\frac{1+z}{1+z}f(z).$$

证明 T 是 H 上对称算子, U 是 T 的 Cayley 变换, 求出 $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I)$ 和 $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I)$, 证明其中一个是 H, 另一个的余维数为 1.

5. 设 H 为习题 4 中所定义的空间. 定义 V 如下:

$$(Vf)(z) = zf(z^2).$$

证明 V 是等距的且是 H 中亏指数为 0 和 ∞ 的闭对称算子 T 的 Cayley 变换.

6. 证明右移算子 S_{r}: $l^2 \to l^2$, 即 $(\xi_1, \xi_2, \cdots) \to (0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$ 是等距的, 但不是酉的, 并说明 S_{r} 是 T 的 Cayley 变换, 这里 T: $\mathfrak{D}(T) \to l^2$ 定义为

$$x \to y = (\eta_j),$$

其中 $\eta_1 = \mathrm{i}\xi_1$, $\eta_j = \mathrm{i}(2\xi_1 + \cdots + 2\xi_{j-1} + \xi_j)$ $(j = 2, 3, \cdots)$,

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{x = (\xi_j) \Big| |\xi_1|^2 + |\xi_1 + \xi_2|^2 + |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3|^2 + \cdots < \infty\right\}.$$

7. 设 $T = \sum\limits_n \lambda_n P_n$ 是投影算子的加权和, 这里 $\lambda_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是实的, 证明 T 的 Cayley 变换 $V = \sum\limits_n \left(\dfrac{\lambda_n - \mathrm{i}}{\lambda_n + \mathrm{i}}\right) P_n$.

8. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, $\mathcal{R}(T + \mathrm{i}I) = H$, $\mathcal{R}(T - \mathrm{i}I) \neq H$, 证明 T 没有自共轭扩张.

9. 证明对称算子可以有多种自共轭扩张. 例如, 考虑 $Tx = x''$, 这里

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{x \in L^2(0,1) \middle| x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0\right\}.$$

10. 设 $C_0^2(0,1)$ 是 $(0,1)$ 上二次连续可微, 且具有紧支柱的函数, 令 $Tx = -x'', \forall x \in C_0^2(0,1)$. 证明 T 的闭包是稠定的对称算子, 并确定 T 的所有自共轭扩张.

11. 证明线性算子 $Tx = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{x \in L^2(0,\infty) \middle| x(0) = 0, x' \in L^2(0,\infty)\right\}$$

是 $L^2(0,\infty)$ 中的对称算子, 但它没有自共轭扩张.

第四章 无界线性算子的谱算子

§4.1 无界线性算子谱的定义和例

第二章集中研究了有界线性算子的谱分解, 有界线性算子的谱理论相对来说是比较完备的. 本章考虑的重点是无界线性算子的谱, 确定无界线性算子谱的分布对于研究无界线性算子构造特征是十分重要的. 首先从无界线性算子谱分解的例子出发, 进而对谱的性质、自共轭算子、正常算子的谱族和谱积分加以研究, 讨论它们的性质.

4.1.1 无界线性算子谱的定义

本章假定 $\mathfrak{D}(T)$ 在 H 中是稠密的. (事实上, 如果 $\mathfrak{D}(T)$ 不稠, 可以在一个较小的空间 H_1 中研究, 使之在 H_1 中是稠密的.) 在通常的情况下, 稠密的条件是可以满足的, 当 $H = L^2(\Omega)$ 时,"好的" 函数, 例如 $C_0^\infty(\Omega)$ (一类有紧支柱的, 无穷次可微的函数) 在 $L^2(\Omega)$ 中稠.

在 2.1 节中, 我们引入了线性算子谱的定义和分类, 这一分类对于无界线性算子也是适用的, 这里重述谱点和正则点的定义.

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子, T: $\mathfrak{D}(T) \subset H \to H$. $\rho(T)$ 称为正则点集, 如果

$$\begin{aligned}\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \big| \lambda I - T \text{ 是一一的}, \mathcal{R}(\lambda I - T) \text{ 在 } H \text{ 中稠密}, \\ (\lambda I - T)^{-1} \text{ 是有界的}\}.\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

正则点的补集称为 T 的谱集, 记为 $\sigma(T)$.

谱集 $\sigma(T)$ 可分类为点谱 $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, 连续谱 $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ 和剩余谱 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$,

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(T), \tag{4.1.2}$$

其中

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - T \text{ 不是一一的}\},$$

$$\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - T \text{ 是一一的, 但是 } \mathcal{R}(\lambda I - T) \text{ 在 } H \text{ 中不稠密}\},$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{c}}(T) = &\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - T \text{ 是一一的}, \mathcal{R}(\lambda I - T) \text{ 在 } H \text{ 中稠密}, \\ &\text{但 } (\lambda I - T)^{-1} \text{ 是无界的}\}.\end{aligned}$$

注 1 根据定理 3.1.5 , 有界线性算子是闭的充要条件是它的定义域是闭的, 于是对于 Hilbert 空间 H 上的闭线性算子 $T, \lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \lambda I-T$ 是一一的, $\mathcal{R}(\lambda I-T) = H$; $\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T) \Leftrightarrow \lambda I - T$ 是一一的, $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = H$, 但 $\mathcal{R}(\lambda I - T) \neq H$.

注 2 无界线性算子与有界线性算子不同, 它的谱集可能是整个复平面, 也可能是空集 (参阅定理 5.1.6).

4.1.2 谱分析的例子

为了对无界线性算子的谱有一个感性的认识, 我们给出一些关于无界线性算子的谱分析的实例.

例 4.1.1 设 $H = L^2(-\infty, \infty)$, 微分算子定义为

$$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \quad Tx = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{4.1.3}$$

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ x \in H \middle| x(t) \text{ 是局部绝对连续的}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \in H \right\}. \tag{4.1.4}$$

为研究 T 的谱集, 首先考虑 $\lambda I - T$ 是否是一一的, 即研究方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x \tag{4.1.5}$$

是否有非零解. 由于方程 (4.1.5) 的解为形如 $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$, $t \in (-\infty, \infty)$ 的函数, 显然 $x \in H$ 当且仅当 $c = 0$. 因此对于任意的 λ, $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \varnothing$.

对于 $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$, 我们考虑 $\lambda I - T$ 的值域, 对于 $\forall y \in H = L^2(-\infty, \infty)$, 方程

$$\lambda x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \tag{4.1.6}$$

是一阶线性非齐次方程 (等号是在几乎处处成立的意义下). 注意到 $y \in L^2(-\infty, \infty)$, 方程 (4.1.6) 可以求出以下形式的解:

$$x(t) = -\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)} y(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad \mathrm{Re}\lambda < 0, \tag{4.1.7}$$

$$x(t) = \int_{t}^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)} y(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad \mathrm{Re}\lambda > 0. \tag{4.1.8}$$

显然也可以通过对上式微分来验证它们是方程 (4.1.6) 的解. 这说明值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 是全空间, 并且由 (4.1.7) 和 (4.1.8) 定义的逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是有界的. 事实上, 在式 (4.1.7) 中令

$$k(t, \tau) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}, & t \geqslant \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

式 (4.1.7) 成为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k(t,\tau)|\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}|\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}|\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda},$$

根据例 1.2.8, 有

$$\|\,(\lambda I-T)^{-1}\,\|\leqslant\|k\|_1=\frac{1}{-\mathrm{Re}\lambda}. \tag{4.1.10}$$

同样可以证明当 $\mathrm{Re}\lambda>0$, (4.1.8) 定义的 $(\lambda I-T)^{-1}$ 也是有界的. 即

$$\mathrm{Re}\lambda\neq 0,\quad \lambda\in\rho(T). \tag{4.1.11}$$

当 $\lambda=0$, 方程 (4.1.6) 成为

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,$$

于是

$$\int_{-a}^{b}y(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{b}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(-a)-x(b),$$

由于

$$\int_{0}^{b}x(t)\overline{x'(t)}\mathrm{d}t=|x(t)|^2\Big|_0^b-\int_0^b x'(t)\overline{x(t)}\mathrm{d}t, \tag{4.1.12}$$

注意到 $x(t)\in\mathfrak{D}(T),x(t),x'(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 于是

$$\lim_{b\to\infty}|x(b)|^2=|x(0)|^2+\lim_{b\to\infty}2\mathrm{Re}\left(\int_0^b x(t)\overline{x'(t)}\mathrm{d}t\right)$$

存在, 并且由于 $x(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 只能有

$$\lim_{b\to\infty}x(b)=0. \tag{4.1.13}$$

同理可证 $x(-a)\to 0\ (a\to+\infty)$, 即 $y\in\mathcal{R}(T)$ 应满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}y(t)\mathrm{d}t=0.$$

令

$$M=\left\{y\in L^2(-\infty,\infty)\,\Big|\,\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}y(t)\mathrm{d}t=0\right\}. \tag{4.1.14}$$

M 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 的真子空间, 且 $\mathcal{R}(T)\subseteq M$, 下面说明 $\mathcal{R}(T)$ 是 M 的真子空间. 令

$$y_0(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ -2, & 0\leqslant t<1,\\ t^{-\frac{3}{2}}, & t\geqslant 1.\end{cases}$$

显然 $y_0(t)\in M$. 如果 $y_0(t)\in\mathcal{R}(T)$, 则存在 $x_0(t)$, 使得 $-\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=y_0$, 于是

$$x_0(t)=\begin{cases}c_0, & t<0\\ c_0+2t, & 0\leqslant t<1,\\ c_0+2t^{-\frac{1}{2}}, & 1\leqslant t,\end{cases}$$

但对于任意的常数 c_0, $x_0(t)\notin L^2(-\infty,\infty)$, 于是 $\mathcal{R}(T)\subset M$ (真包含). 令

$$M_1=\left\{y\in M\,\middle|\,\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\mathrm{d}\tau\in L^2(-\infty,\infty)\right\}. \tag{4.1.15}$$

下面证明 $\mathcal{R}(T)=M_1$. 对于 $\forall y\in\mathcal{R}(T)$, $\exists x\in\mathfrak{D}(T)$, 使得 $-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$, 由于 $x(-\infty)=0$, 所以

$$x(t)=-\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\mathrm{d}\tau\in\mathfrak{D}(T), \tag{4.1.16}$$

即 $y\in M_1$. 反之 $y\in M_1$, 令 $x(t)=-\displaystyle\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\mathrm{d}\tau\in L^2(-\infty,\infty)$, 且 $-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\in L^2(-\infty,\infty)$, 即 $x(t)\in\mathfrak{D}(T)$, $x(t)$ 是 $y(t)$ 的原像, 于是推出 $y\in\mathcal{R}(T)$.

下面证明 $\mathcal{R}(T)$ 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中稠密. 对 $\forall y\in L^2(-\infty,\infty)$ 及 $\forall\varepsilon>0$, 存在 N, 使得

$$\int_{-\infty}^{-N}|y(t)|^2\,\mathrm{d}t<\varepsilon,\quad \int_{N}^{\infty}|y(t)|^2\,\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

记 $c=\displaystyle\int_{-N}^{N}y(t)\mathrm{d}t$, 存在 $k>0$, 使得 $\dfrac{c^2}{k}<\varepsilon$, 令

$$y_0(t)=\begin{cases}0, & t<-N,\\ y(t), & -N\leqslant t\leqslant N,\\ -\dfrac{c}{k}, & N<t<N+k,\\ 0, & t\geqslant N+k.\end{cases}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}y_0(t)\mathrm{d}t=0, \tag{4.1.17}$$

且 $\int_{-\infty}^{t} y_0(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是在 $[-N, N+k]$ 以外均等于零的连续函数, 于是 $\int_{-\infty}^{t} y_0(\tau)\mathrm{d}\tau \in L^2(-\infty,\infty)$, 即 $y_0 \in \mathcal{R}(T)$, 并且

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)-y_0(t)|^2\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{-N} |y(t)|^2\,\mathrm{d}t+\int_{N+k}^{\infty} |y(t)|^2\,\mathrm{d}t+\int_{N}^{N+k} |y(t)-y_0(t)|^2\,\mathrm{d}t<5\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\overline{\mathcal{R}(T)}=H$.

再证明逆算子 T^{-1} 无界. 对于 $\forall y \in \mathcal{R}(T)\subset M$, 逆算子为

$$x(t)=-\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.1.18}$$

或者

$$x(t)=\int_{t}^{+\infty} y(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.1.19}$$

它们不是有界线性算子, 事实上, 令

$$y_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}, & -n\leqslant t\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2n}}, & 0<t\leqslant n,\\ 0, & \text{其余},\end{cases}$$

则 $\|y_n\|=\left(\int_{-\infty}^{\infty} |y_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=1$, 且 $y_n \in M_1=\mathcal{R}(T)$. 由 (4.1.18) 算出相应的 $x_n(t)$ 为

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{t+n}{\sqrt{2n}}, & -n\leqslant t\leqslant 0,\\ \sqrt{\dfrac{n}{2}}-\dfrac{t}{\sqrt{2n}}, & 0<t\leqslant n,\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

$$\|x_n\|^2=\int_{-n}^{0}\frac{(n+t)^2}{2n}\mathrm{d}t+\int_{0}^{n}\frac{(n-t)^2}{2n}\mathrm{d}t=\frac{n^3}{6n}+\frac{n^3}{6n}=\frac{n^2}{3}\to\infty \quad (n\to\infty),$$

即 $\left\|T^{-1}y_n\right\|\to\infty$, T^{-1} 无界. 于是

$$\lambda=0,\quad \lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T). \tag{4.1.20}$$

对于 $\mathrm{Re}\lambda=0,\ \lambda\neq 0$, 不妨令 $\lambda=\mathrm{i}\omega$, 于是方程 (4.1.6) 成为

$$\mathrm{i}\omega x-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y. \tag{4.1.21}$$

令

$$y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}u(t),\quad x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}v(t), \tag{4.1.22}$$

方程 (4.1.21) 成为

$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u(t),$$

即 $\lambda=0$ 的情况. 由于 (4.1.22) 是保范的变换, 我们使用类似的办法, 可以得到

$$\mathrm{Re}\lambda=0,\quad \lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T). \tag{4.1.23}$$

注 1 由于 $\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{c}}(T)=\{\lambda|\mathrm{Re}\lambda=0\}$ 是一个无界的集合, 也可以知道 T 是无界的线性算子.

注 2 $T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 不是对称的微分算子, 其谱点分布不在实轴上, 以后可以看到 $T_1=-\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是对称的微分算子, 它的谱在实轴上 (见本节习题 3).

从下例中可以看到, 当空间发生变化时, 谱也会发生变化.

例 4.1.2 设 $H=L^2[0,+\infty)$, $T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $Tx=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\mathfrak{D}(T)=\left\{x\in H\middle|x(t)\text{ 局部绝对连续}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\in H, \text{且 } x(0)=0\right\}.$$

首先可以看到 $\lambda I-T$ 是一一的, 即

$$\begin{cases}(\lambda I-T)x=0,\\ x\in\mathfrak{D}(T)\end{cases} \tag{4.1.24}$$

只有零解, 于是 $\sigma_{\mathrm{p}}(T)=\varnothing$.

使用与例 4.1.1 相同的办法 (只需把 $-\infty$ 改为 0 点), 可以推出 $\mathrm{Re}\lambda=0, \lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)$. 对于 $\mathrm{Re}\lambda\neq 0$, 例 4.1.1 中的 $-\infty$, 改为有限点 $t=0$ 后, 情况发生变化.

当 $\mathrm{Re}\lambda<0$ 时, $\lambda I-T$ 的逆算子为

$$x(t)=(\lambda I-T)^{-1}y=-\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}y(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.1.25}$$

显然对 $\forall y\in L^2[0,\infty)$, $x(0)=0$. 类似于 (4.1.9)~(4.1.10) 的证明, 对于 $\mathrm{Re}\lambda<0$, 因为 $\|k\|_1<\infty$, 所以 $(\lambda I-T)^{-1}$ 连续, 故 $\lambda\in\rho(T)$.

当 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 时, 由 $(\lambda I - T)x = y$, 求出逆算子为

$$x(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)} y(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.1.26}$$

由于 $x(0) = 0$, 可推出 $(\lambda I - T)$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda - T) = M_2$, 其中

$$M_2 = \{y \in H \big| (y, \mathrm{e}^{-\lambda t}) = 0\}.$$

因为 $\mathrm{e}^{-\lambda t} \in L^2[0,\infty), \overline{M_2} \neq H$, 所以有 $\mathrm{Re}\lambda > 0, \lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$.

例 4.1.3 $H = L^2[0,\infty)$, $T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $Tx = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{x \in H \big| x(t)\text{局部绝对连续}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \in H\right\}. \tag{4.1.27}$$

可以证明 $\mathrm{Re}\lambda = 0, \lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$. $\mathrm{Re}\lambda < 0$, $(\lambda I - T)x = 0$ 有非零解 $\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. $\mathrm{Re}\lambda > 0$, 定义在 H 上的逆算子

$$x(t) = \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)} y(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \forall y \in H \tag{4.1.28}$$

存在且有界, $\lambda \in \rho(T)$.

注 定义域的扩大 ($x(0) = 0$ 条件去掉), 使得微分算子的剩余谱变为空集 (参阅习题 4.2 第 4 题).

例 4.1.4 $H = L^2[0,\infty)$, $T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $Tx = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{x \in H \big| x(t) \text{ 局部绝对连续}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \in H,\ x(0) = c \neq 0\right\}.$$

同例 4.1.1, $\mathrm{Re}\lambda = 0,\ \lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(T)$. 当 $\mathrm{Re}\lambda < 0$ 时, 方程

$$\lambda x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

有非零解 $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t} \in L^2[0,\infty)$, 即 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$. 对于 $\mathrm{Re}\lambda > 0$, 方程

$$\lambda x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y$$

有以下形式的解:

$$x(t) = \frac{c}{c_1} \int_t^\infty \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)} y(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.1.29}$$

其中

$$c_1 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} y(t)\mathrm{d}t \neq 0. \tag{4.1.30}$$

可以证明 $\mathrm{Re}\lambda > 0,\ \lambda \in \rho(T)$.

注 几个例子中边界条件的不同, 影响微分算子特征值的分布, 但 $\sigma_c(T)$ 没有随着边界条件的变化而变化 (参阅定理 4.5.16).

习 题 4.1

1. 设 $T:\mathfrak{D}(T)\to H$ 是一个线性算子, 根据下述性质:

(1) $T_\lambda = T-\lambda I$ 不是单射;

(2) $\mathcal{R}(T_\lambda)$ 不在 H 中稠密;

(3) λ 是近似谱点,

分别刻画 λ 在以下那个集合中: $\rho(T),\sigma_p(T),\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$.

2. 若 $T:\mathfrak{D}(T)\to H$ 是对称线性算子, 而且 λ 不是实的. 证明 T 的预解算子 $R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$ 存在, 且是满足下述条件的有界线性算子: 对任意 $y\in\mathcal{R}(T_\lambda)$, 有 $\|R_\lambda y\|\leqslant\dfrac{\|y\|}{|\beta|}$ $(\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta)$, 故 $\lambda\in\rho(T)\cup\sigma_r(T)$.

3. 设 $T:\mathfrak{D}(T)\to L^2(-\infty,+\infty)$ 由 $x\to \mathrm{i}x'$ 定义, 这里 $x'=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\mathfrak{D}(T)=\{x\in L^2(-\infty,+\infty)|x(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 的每个紧子区间上是绝对连续的, 并使得 $x'(t)\in L^2(-\infty,+\infty)\}$. 证明

(1) T 是无界的自共轭算子;

(2) T 没有特征值;

(3) $\sigma(T)=\mathbb{R}$.

4. 设 T_1,T_2,T_3 为例 3.3.9 所定义的算子. 令 $\mathfrak{D}(T_4)=\{x\in\mathfrak{D}(T_1)|x(0)=0\}$, 定义 $T_4x=\mathrm{i}x'$, $\forall x\in\mathfrak{D}(T_4)$. 证明

(1) $\forall\lambda\in\mathbb{C},\lambda\in\sigma_p(T_1)$;

(2) $\sigma(T_2)=\{2n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}=\sigma_p(T_2)$;

(3) 对 $\forall\lambda\in\mathbb{C},\mathcal{R}(T_3-\lambda I)$ 的余维数是 1, 因此 $\sigma_r(T_3)=\mathbb{C},\sigma_p(T_3)=\varnothing$;

(4) $\sigma(T_4)$ 是空集.

(注: 若 N 是向量空间 X 的子空间, N 在 X 中的余维数即为商空间 X/N 的维数.)

5. 设算子 T 如习题 3.1 第 10 题所定义, 证明

(1) T 没有点谱;

(2) 对任何 $\lambda\in\mathbb{R},\lambda\in\sigma_c(T)$;

(3) 任意非实复数属于 $\rho(T)$.

6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是连续函数, 定义 $f(Q)$ 为

$$f(Q):u(x)\to f(x)u(x),$$

这里 $f(Q)$ 的定义域为

$$D=\{u(x)\in L^2(-\infty,+\infty)|f(x)u(x)\in L^2(-\infty,+\infty)\}.$$

证明 (1) 当 $f(x)$ 是实值时, $f(Q)$ 是对称的;

(2) $f(Q)$ 的谱为 $\overline{f(\mathbb{R})}$;

(3) λ 是 $f(Q)$ 的特征值当且仅当集合 $f^{-1}(\{\lambda\})$ 有正测度;

(4) 设 λ_0 是 $f(Q)$ 的特征值, 则零空间 $\mathcal{N}(f(Q)-\lambda_0 I)$ 是无穷维的.

7. 设 Hilbert 空间 $H=L^2(\mathbb{R}^n)$, 这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. 对 $k=1,2,\cdots,n$, 设

$$\mathfrak{D}(T_k)=\left\{u(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)\left|\int_{\mathbb{R}^n}x_k^2|u(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\right.\right\},$$

这里 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$, 定义 T_k:

$$T_k: u(x_1,\cdots,x_n)\to x_k u(x_1,\cdots,x_n),$$

这里 $u(x)\in\mathfrak{D}(T_k)$. 证明

(1) T_k 是对称的;

(2) $\sigma(T_k)=\sigma_{\mathrm{c}}(T_k)=\mathbb{R}$.

8. 设 $T_k(k=1,\cdots,n)$ 如上述第 7 题所定义, 对 $\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 设 $V(x_1,\cdots,x_n)=V(x)$ 是实值连续函数, 定义 $V(T)=V(T_1,\cdots,T_n)$ 为

$$V(T): u(x)\to V(x)u(x),$$

这里 $\mathfrak{D}(V(T))=\{u(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)|V(x)u(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. 证明 $V(T)$ 是对称的, 并且 $\sigma(V)=\overline{\mathcal{R}(V)}$.

9. 设 $X=L^2(0,1)$, 集 $D=\{x\in X|x'$ 是绝对连续, $x''\in X$ 且 $x(0)=x(1)$, $x'(0)=x'(1)\}$, 考虑 T: $x\in D\mapsto -x''+2x'-x$. 给出 T 及 T^* 的谱.

§4.2　无界线性算子谱的分布

4.2.1　无界线性算子谱集的性质

从 4.1 节的例子可以看到, 一般来说要算出无界算子的谱, 并加以分类是十分不容易的, 对其谱的研究从它们的基本性质入手.

由于当 $\lambda\in\rho(T)$ 时, $(T-\lambda I)^{-1}$ 是有界线性算子, 与定理 2.2.3、引理 2.2.4 和定理 2.2.5 的证明相似, 我们可以得到

定理 4.2.1　设 T 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子, 则 $\sigma(T)$是闭集, 且在 $\rho(T)$ 上,

$$\lambda\mapsto(T-\lambda I)^{-1} \tag{4.2.1}$$

的映射是算子值解析函数.

与有界线性算子相类似, 我们有

定理 4.2.2　设 T 是 Hilbert 空间 H 上闭的线性算子, 则

(1) $\lambda\in\rho(T)$ 当且仅当 $\mathcal{N}(T-\lambda I)=\{0\}$, 且 $\mathcal{R}(T-\lambda I)=H$;

(2) $\sigma(T^*)=\left\{\overline{\lambda}\,|\lambda\in\sigma(T)\right\}$, 并且对于 $\lambda\in\rho(T)$, $[(T-\lambda I)^*]^{-1}=[(T-\lambda I)^{-1}]^*$.

证明 (1) 由第一节谱的分类后的注可以得到. (2) 的证明类似于定理 2.2.7, 只需注意到当 T 是闭的, $T^{**}=T$. □

例 4.2.3 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是可分的 Hilbert 空间 H 的正交基, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 是可数多个复数, 令

$$D=\left\{x\in H\left|\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n(x,e_n)|^2<\infty\right.\right\}, \tag{4.2.2}$$

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,\quad x\in D, \tag{4.2.3}$$

可以证明 T 是一个闭算子, 且 $\mathfrak{D}(T^*)=D$,

$$T^*x=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda}_n(x,e_n)e_n,\quad x\in D. \tag{4.2.4}$$

显然, T 是定义 2.3.4 中定义的投影算子的加权和. 由推论 2.3.13 后的注可以知道,

$$\sigma(T)=\overline{\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}},$$

并且 $\sigma(T^*)=\overline{\sigma(T)}$.

注 由此, 可以构造一个无界线性算子, 使其谱集合 $\sigma(T)$ 等于复平面 $\mathbb{C}$ 中的任意一个闭子集.

4.2.2 线性算子的数值域

为了研究谱点的分布, 如同在有界线性算子的情况一样, 给出数值域的概念.

定义 4.2.4 T 是 Hilbert 空间 H 中的线性算子, T 的数值域 $W(T)$ 是一个复数集合, 满足

$$W(T)=\{(Tx,x)\,|x\in\mathfrak{D}(T),\|x\|=1\}. \tag{4.2.5}$$

注 1 数值域 $W(T)$ 的定义, 并未要求 $\mathfrak{D}(T)$ 是稠的.

注 2 当 T 是无界线性算子时, $W(T)$ 是无界集. 一般来说 $W(T)$ 既不是开的, 也不是闭的.

定理 4.2.5 $W(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的凸子集.

证明 设 $l_1,l_2\in W(T)$, 即存在 $u_1,u_2\in\mathfrak{D}(T)$, $\|u_1\|=1,\|u_2\|=1$, 且 $l_1=(Tu_1,u_1)$, $l_2=(Tu_2,u_2)$, 我们要证明的是对于在 l_1,l_2 连线上任意的 l, 存在 $u\in\mathfrak{D}(T),\|u\|=1$, 使得 $(Tu,u)=l$. 令

$$u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,$$

$$A_1=(T(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2),\ \lambda_1u_1+\lambda_2u_2)=|\lambda_1|^2l_1+2\mathrm{Re}((Tu_1,u_2)\lambda_1\overline{\lambda}_2)+|\lambda_2|^2l_2,$$

$$A_2 = \|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\|^2 = |\lambda_1|^2 + 2\mathrm{Re}((u_1, u_2)\lambda_1\overline{\lambda}_2) + |\lambda_2|^2.$$

下面要证明的是, 对于任意 $0 < \lambda < 1$, 存在 u, 使得

$$\frac{A_1}{A_2} = l_2(1-\lambda) + l_1\lambda,$$

当 $A_2 = 1$ 时, 令

$$A = \frac{A_1 - l_2 A_2}{l_1 - l_2} = |\lambda_1|^2 + \alpha_{12}\overline{\lambda}_1\lambda_2 + \alpha_{21}\lambda_1\overline{\lambda}_2.$$

即要证明通过 λ_1 和 λ_2 的选择, A 要取遍 $(0,1)$ 之间的所有值. 注意到 A_2 是实数, 令 x, y 是实数, 且 $\lambda_1 = x, \lambda_2 = \gamma y$, 其中

$$\gamma = \begin{cases} \pm 1, & \overline{\alpha}_{12} = \alpha_{21}, \\ \pm\dfrac{\overline{\alpha}_{12} - \alpha_{21}}{|\overline{\alpha}_{12} - \alpha_{21}|}, & \overline{\alpha}_{12} \neq \alpha_{21}, \end{cases}$$

$\pm$ 号的选择为了使 $\beta = \mathrm{Re}[\overline{\gamma}(u_1, u_2)] > 0$. 于是, 有

$$A = x^2 + \alpha x y, \tag{4.2.6}$$

$$A_2 = x^2 + 2\beta x y + y^2,$$

其中

$$\alpha = \overline{\alpha} = \gamma\alpha_{12} + \overline{\gamma}\alpha_{21} = \pm(\alpha_{12} + \alpha_{21}),$$

或者

$$\alpha = \pm[(|\alpha_{12}|^2 - |\alpha_{21}|^2)\big/|\overline{\alpha}_{12} - \alpha_{21}|].$$

由于

$$|\beta| \leqslant |\overline{\gamma}(u_1, u_2)| \leqslant \|u_1\| \cdot \|u_2\| = 1,$$

以及 $A_2 = 1$, 有

$$y = -\beta x + \sqrt{1 - (1-\beta^2)x^2}, \quad |x| \leqslant 1,$$

代入 (4.2.6), 有

$$A = (1 - \alpha\beta)x^2 + \alpha x\sqrt{1 - (1-\beta^2)x^2},$$

它作为 x 的函数在 $[0,1]$ 上连续, 并且在端点处分别为 0 和 1 . 定理得证. □

注 1 令$\Gamma(T) = \overline{W(T)}$, 则 $\Gamma(T)$ 是闭的凸集.

注 2 如果 $\Gamma(T)$ 不充满整个平面, 则 $\Gamma(T)$ 的补集 $\Delta(T) = \mathbb{C}\backslash\Gamma(T)$ 有一个或者两个连通的分支, 当 $\Gamma(T)$ 是一个无界的条带时, $\Delta(T)$ 有两个连通分支, 并且两个连通分支都是半平面.

当 T 是有界线性算子时, $W(T)$ 是有界凸集, $\Delta(T)$ 是连通的.

定理 4.2.6 设 T 是 Hilbert 空间 H 中闭的线性算子, $\lambda \in \Delta(T)$, 则 $T-\lambda I$ 是一一的, 并且 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 是闭的.

证明 由于 $\lambda \in \Delta$, 则

$$\delta = \operatorname{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) > 0. \tag{4.2.7}$$

对于 $x \in \mathfrak{D}(T)$, $\|x\|=1$,

$$\delta \leqslant |(Tx,x)-\lambda| = |((T-\lambda I)x,x)| \leqslant \|(T-\lambda I)x\|, \tag{4.2.8}$$

即 $T-\lambda I$ 是一一的, 且在 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 上有逆算子 $(T-\lambda I)^{-1}$, $(T-\lambda I)^{-1}$ 在 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 上是有界的.

对于 $\forall y \in \overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)}$, 存在 $y_n \in \mathcal{R}(T-\lambda I)$, $y_n \to y\ (n\to\infty)$, 且有 $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $y_n = (T-\lambda I)x_n$. 由 (4.2.8), 有

$$\delta\|x_n\| \leqslant \|(T-\lambda I)x_n\| = \|y_n\|.$$

于是 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 即 $x_n \to x$. 由于 T 是闭的知, $x \in \mathfrak{D}(T), y = (T-\lambda I)x$, 即 $y \in \mathcal{R}(T-\lambda I)$, 因此 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 是闭的. □

由定理 2.1.4 的注 1 (关于闭算子正则点), 有

定理 4.2.7 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的闭的线性算子, 如果 $\lambda \in \Delta(T)$, 且 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 在 H 中稠, 那么 $\lambda \in \rho(T)$ 且

$$\left\|(T-\lambda I)^{-1}\right\| \leqslant (\operatorname{dist}(\lambda, \overline{W(T)}))^{-1}. \tag{4.2.9}$$

注 对于闭的线性算子 T, $\lambda \in \Delta(T)$, 则 $\lambda \in \rho(T)$ 或者 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{r}}(T)$. 进一步地, 对于闭的正常算子 T, $\lambda \in \Delta(T)$, 则 $\lambda \in \rho(T)$, 即 $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$ (参阅定理 2.6.13).

定理 4.2.8 设 T 是 Hilbert 空间 H 中稠定的线性算子, 如果 $W(T) \neq \mathbb{C}$, 则 T 是可闭的.

证明 设 $\lambda \notin W(T)$, 由于 $W(T)$ 是凸的, $W(T)$ 只能在以 λ 为界的半个平面之内, 不妨设 $W(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0\}$, 即对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $\mathrm{Re}(Tx,x) \geqslant 0$. 为了证明 T 是可闭的, 只需证明如果 $x_n \in \mathfrak{D}(T)$, $x_n \to 0$ 且 $Tx_n \to y$, 则可以推出 $y=0$. 对于 $z \in \mathfrak{D}(T)$ 和正实数 λ, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathrm{Re}(T(x_n+\lambda z),(x_n+\lambda z)) \\ &= \mathrm{Re}[(Tx_n,x_n)+\lambda(Tx_n,z)+\lambda(Tz,x_n)+\lambda^2(Tz,z)]. \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 且两边除以 λ, 有

$$0 \leqslant \mathrm{Re}[(y,z)+\lambda(Tz,z)].$$

令 $\lambda \to 0$, 有$\mathrm{Re}(y,z) \geqslant 0$. 由于 $z \in \mathfrak{D}(T)$ 是任意的, 我们可以得到 $(y,z)=0$, 由 $\mathfrak{D}(T)$ 稠, 推知 $y=0$. □

4.2.3 线性算子的正则型域

进一步地, 可以定义 T 的正则型域.

定义 4.2.9 如果存在数 $k=k(\lambda)>0$, 使得对于所有的 $x \in \mathfrak{D}(T)$,

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqslant k\|x\|, \tag{4.2.10}$$

则称 λ 为算子 T 的正则型点. 全体 T 的正则型点称为 T 的正则型域, 记为 $\Pi(T)$.

注 1 T 的特征值不属于 $\Pi(T)$. 显然, $\lambda \in \Pi(T)$, 逆算子 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在, 但其定义域可以不是全空间.

注 2 如果 $\lambda \in \rho(T)$, 由定理 1.2.18 知, $\lambda \in \Pi(T)$, 即 $\rho(T) \subset \Pi(T)$, 或者说 $(\Pi(T))^{\mathrm{c}} \subset \sigma(T)$. 其逆不成立, 当 $(T-\lambda I)^{-1}$ 的定义域是全空间时, 算子 T 的正则型点是 T 的正则点. 即 T 的正则型域包含 T 的所有正则点, 但也可以包含 T 的谱点.

注 3 由 (4.2.8) 知 $\Delta(T) \subset \Pi(T)$, 即 $(\Pi(T))^{\mathrm{c}} \subset \Gamma(T)=\overline{W(T)}$.

定理 4.2.10 线性算子 T 的正则型域是开集.

证明 如果 $\lambda_0 \in \Pi(T)$, 当 $|\lambda-\lambda_0|=\delta \leqslant \dfrac{1}{2}k(\lambda_0)$ 时, 对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$,

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqslant \|(T-\lambda_0 I)x\| - |\lambda-\lambda_0|\,\|x\| \geqslant k(\lambda_0)\|x\| - \delta\|x\| \geqslant \frac{1}{2}k(\lambda_0)\|x\|,$$

即 $\lambda \in \Pi(T)$. □

定理 4.2.11 (1) 如果 T 是 Hilbert 空间 H 中的对称算子, 则 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \Pi(T)$;

(2) 如果 T 是酉算子, 则 $\mathbb{C}\backslash\{\lambda \in \mathbb{C}\,|\,|\lambda|=1\} \subset \Pi(T)$.

证明 (1) 对于 $\lambda=a+b\mathrm{i}, b \neq 0$,

$$\|(T-\lambda I)x\|^2 = \|(T-aI)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \geqslant b^2\|x\|^2,$$

即 $\lambda \in \Pi(T)$.

(2) 如果 $|\lambda| \neq 1$, 那么

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqslant |\|Tx\| - |\lambda|\,\|x\|| = |1-|\lambda||\,\|x\|.$$

因为 $|1-|\lambda||>0$, 故 $\lambda \in \Pi(T)$. □

可以类似于定理 3.4.12 证明:

定理 4.2.12 在 $\Pi(T)$ 的连通分支上, 线性算子的亏指数 $d(T)$ 是一个常数. 特别地, 对称算子的亏指数在上、下平面是常数.

由定理 4.2.12 和定理 4.2.10 有

定理 4.2.13 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, 如果 $\Pi(T)\cap\mathbb{R}\neq\varnothing$, 则 $n_+=n_-$.

定义 4.2.14 Hilbert 空间 H 上的对称算子 T 称为是下方有界的, 如果存在一个实数 $r\in\mathbb{R}$, 使得对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, $(Tx,x)\geqslant r\|x\|^2$.

定理 4.2.15 下方有界的对称算子 T 的正则型域 $\Pi(T)\cap\mathbb{R}\neq\varnothing$. 进一步地, T 有自共轭扩张.

证明 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, $\|x\|\neq 0$,

$$\|(T-\lambda I)x\|\geqslant\frac{1}{\|x\|}((T-\lambda I)x,x)\geqslant(r-\lambda)\|x\|,$$

于是当 $\lambda<r$ 时, $\lambda\in\Pi(T)$, 即 $\Pi(T)\cap\mathbb{R}\neq\varnothing$. 由定理 4.2.13 知 T 有自共轭扩张.

定理 4.2.16 设 S 是 Hilbert 空间 H 上的对称算子, 带有下界 γ, 那么存在 S 的一个保持下界 γ 不变的自共轭扩张 T, 使得

$$\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(S^*)\cap H_S,$$

$$T=S^*\big|_{\mathfrak{D}(T)},\text{ 即 } Tx=S^*x,\quad\forall x\in\mathfrak{D}(T),$$

其中 H_S 是 $\mathfrak{D}(S)$ 在范数 $\|x\|_S^2=(Sx,x)+(1-\gamma)\|x\|^2$ 下的完备化.

这个自共轭扩张称为 S 的 Friedrichs 扩张.

证明可参阅 [27].

4.2.4 无界自共轭算子谱集的性质

T 是自共轭的, 即 $T=T^*$, 则对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, 由 $(Tx,x)=(x,Tx)$, 知 (Tx,x) 是实数, 于是有

定理 4.2.17 自共轭算子 T 的特征值是实数, 对应于不同特征值的特征元素是相互正交的.

定理 4.2.18 设 H 是 Hilbert 空间, T 是 $\mathfrak{D}(T)$ 上定义的自共轭线性算子, 若 λ 不是 T 的特征值, 则 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 在 H 中稠.

证明 若 λ 是实数, 则 $T-\lambda I$ 也是自共轭的, 假如 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 不稠, 则存在 $y\neq 0$, $y\in H$, 且

$$((T-\lambda I)x,y)=0,\quad\forall x\in\mathfrak{D}(T),$$

于是推出 $y\in\mathfrak{D}((T-\lambda I)^*)$, 且 $(T-\lambda I)^*y=(T-\lambda I)y=0$ 与 λ 不是特征值矛盾. 当 λ 不是实数, 假如 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 不稠, 则存在 $y\neq 0$, $y\in H$, 对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, $((T-\lambda I)x,y)=0$, 推知

$$(T-\lambda I)^*y=(T^*-\overline{\lambda}I)y=(T-\overline{\lambda}I)y=0,$$

即 $\overline{\lambda}$ 是 T 的特征值, 与定理 4.2.17 矛盾. □

由剩余谱的定义和上述定理, 有

定理 4.2.19 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, 则 $\sigma_{\mathrm{r}}(T)=\varnothing$.

定理 4.2.20 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\lambda\in\rho(T)$ 当且仅当 $\lambda\in\Pi(T)$, 即存在 $k>0$,

$$\|(T-\lambda I)x\|\geqslant k\|x\|,\quad x\in\mathfrak{D}(T). \tag{4.2.11}$$

证明 必要性. 设 $\lambda\in\rho(T)$, 则 $(T-\lambda I)^{-1}$ 存在且有界, 由于 T 是自共轭的, T 是闭算子, 由定理 2.1.4 的注 1 可知 $(T-\lambda I)^{-1}$ 定义在全空间上, 即

$$\left\|(T-\lambda I)^{-1}y\right\|\leqslant M\|y\|,\quad \forall y\in H.$$

由此推出 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, 令 $y=(T-\lambda I)x$,

$$\|(T-\lambda I)x\|=\|y\|\geqslant\frac{1}{M}\left\|(T-\lambda I)^{-1}y\right\|=\frac{1}{M}\|x\|. \tag{4.2.12}$$

令 $k=\dfrac{1}{M}$, 则必要性得证.

充分性. 由 (4.2.11) 知, λ 不是 T 的特征值, 由定理 4.2.18 知, $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 在 H 中稠, 由定理 4.2.6 知 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 是闭的, 由于 $T-\lambda I$ 是闭的, 由定理 2.1.4 的注 1, $\lambda\in\rho(T)$, 且由 (4.2.11) 知 $\left\|(T-\lambda I)^{-1}\right\|\leqslant\dfrac{1}{k}$. □

注 当 T 是自共轭算子时, $\rho(T)=\Pi(T)$.

由 (3.4.3) 和定理 3.4.5 后的注, 结合上述定理可知

推论 4.2.21 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的自共轭算子, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda\neq0$, 则 $\lambda\in\rho(T)$.

推论 4.2.22 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\lambda\in\sigma(T)$ 当且仅当存在序列 $\{x_n\}\subset\mathfrak{D}(T)$, $\|x_n\|=1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(T-\lambda I)x_n\|=0$.

注 可见自共轭算子的谱点完全由近似点谱组成.

对于 $\lambda\in\mathbb{R}$, 有以下定理

定理 4.2.23 设 T 是 Hilbert 空间 H 中闭的对称算子, 则 T 是自共轭的当且仅当 $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$.

证明 如果 T 是自共轭的, 由推论 4.2.21 可知, $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$. 反之, 如果 $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$, $\pm\mathrm{i}\in\rho(T)$. 由于 T 是闭的, $\mathcal{R}(T\pm\mathrm{i}I)=H$, 由定理 3.4.4 推出 T 是自共轭的. □

定理 4.2.24 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, 则

(1) $\mathcal{R}(T-\lambda I)=H\Rightarrow\lambda\in\rho(T)$;

(2) $\mathcal{R}(T-\lambda I)\neq H\Rightarrow\lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)$.

证明 (1) 由定理 2.1.4 的注 1 可知.

(2) 由于 $T-\lambda I$ 是自共轭的, 所以是闭的, 由定义 3.1.2 的注可知, $(T-\lambda I)^{-1}$ 是闭的. 由定理 4.2.18, $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 在 H 中稠. 若 $(T-\lambda I)^{-1}$ 连续, 由定理 3.1.5 知, $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 闭, 与条件矛盾. 于是 $(T-\lambda I)^{-1}$ 不连续, 即 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{c}}(T)$. □

定理 4.2.25 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, 若 $\lambda\in\sigma(T)$, 则 $\mathcal{R}(T-\lambda I)\neq H$.

证明 (1) 若 $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, 命题在定理 4.2.24 中已证.

(2) $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, 由于 $\lambda\in\mathbb{R}$, $(T-\lambda I)^*=T-\lambda I$, 由定理 3.2.5, 有

$$\mathcal{R}(T-\lambda I)^{\perp}=\mathcal{N}(T-\lambda I).$$

由于 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\mathcal{N}(T-\lambda I)\neq\varnothing$, 命题得证. □

注 显然以上结论对于有界自共轭算子也成立.

4.2.5 自共轭算子的谱集非空

对有界线性算子 T, 有 $\sigma(T)\neq\varnothing$ (定理 2.2.6), 对于无界自共轭线性算子, 我们有相同的结论.

定理 4.2.26 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, 则 $\sigma(T)\neq\varnothing$.

证明 由于 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, 则 $\lambda\in\rho(T)$. 我们只考虑 $\lambda\in\mathbb{R}$, 假如 $\sigma(T)=\varnothing$, 所以 $0\in\rho(T)$. 注意到自共轭算子是闭的, 根据定理 2.1.4, T^{-1} 是定义在全空间上的有界线性算子. 由

$$\frac{1}{\lambda}(T-\lambda I)T^{-1}=\frac{1}{\lambda}I-T^{-1},\quad \lambda\neq 0 \tag{4.2.13}$$

及定理 2.1.4 的注 1,

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{\lambda}(T-\lambda I)T^{-1}\right)=H,\quad \lambda\neq 0. \tag{4.2.14}$$

而在 (4.2.13) 的右边, T^{-1} 是有界自共轭线性算子 (自共轭性参阅习题 3.3 第 2 题), 根据习题 4.5 第 1 题, $\sigma_{\mathrm{e}}(T^{-1})\neq\varnothing$ (本质谱 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)$ 见定义 4.5.1), 注意到 0 不是 T^{-1} 的特征值, 于是存在 $\lambda_0\neq 0$, 使得 $\dfrac{1}{\lambda_0}\in\sigma(T^{-1})$. 根据定理 4.2.25, $\mathcal{R}\left(\dfrac{1}{\lambda_0}I-T^{-1}\right)\neq H$, 矛盾. □

注 但是对于无界的非自共轭算子, 谱集可能是空集, 参阅定理 5.1.6.

定理 4.2.27 设 T 是 Hilbert 空间 H 中闭的对称算子, 则 T 的谱集仅仅可能如下情况之一发生:

(1) $\sigma(T)=\mathbb{C}$;

(2) $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}\lambda\geqslant 0\}$;

(3) $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}\lambda\leqslant 0\}$;

(4) $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$.

证明　令 $\mathbb{C}_{\pm}=\{\lambda\in\mathbb{C}|\pm\mathrm{Im}\lambda>0\}$, 由定理 3.4.1、定理 3.4.2 及定理 3.4.5 后的注知, 对于 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, $T-\lambda I$ 是一一的, 且值域 $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ 是闭的. 如果 $\mathcal{R}(T-\lambda I)=H$, 则 $\lambda\in\rho(T)$, 如果 $\mathcal{R}(T-\lambda I)=\overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)}\neq H$, 则 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{r}}(T)$, 即或者 $\mathbb{C}_{\pm}\subset\sigma(T)$ 或者 $\mathbb{C}_{\pm}\cap\sigma(T)=\varnothing$. 又因为 $\sigma(T)$ 是闭的, 如果 $\mathbb{C}_{\pm}\subset\sigma(T)$, 则可能的结果只有两种, 即 $\sigma(T)=\mathbb{C}$, 或者 $\sigma(T)=\overline{\mathbb{C}_{\pm}}$ (即 $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}\lambda\geqslant 0\}$ 或 $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}\lambda\leqslant 0\}$). 如果 $\mathbb{C}_{\pm}\cap\sigma(T)=\varnothing$, 则 $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$. □

推论 4.2.28　设 T 是 Hilbert 空间 H 中的闭的对称算子, 若 $\sigma(T)$ 不包含整个 $\mathbb{R}$, 则 T 是自共轭的.

证明　由条件 $\rho(T)$ 至少包含一个实数, 根据定理 4.2.27 及定理 4.2.23 可推出 T 是自共轭的. □

习　题　4.2

1. 设 H 为 Hilbert 空间, $T:\mathfrak{D}(T)\to H$ 且 T^* 存在.

(1) 若 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{r}}(T)$, 证明 $\overline{\lambda}\in\sigma_{\mathrm{p}}(T^*)$;

(2) 若 $\overline{\lambda}\in\sigma_{\mathrm{p}}(T^*)$, 证明 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{r}}(T)\cup\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

2. 设 T 是定义在 Hilbert 空间 H 上具有非空正则集的算子, $\lambda_0\in\rho(T)$. 证明

(1) $\lambda\in\sigma(T)$ 当且仅当 $(\lambda-\lambda_0)^{-1}\in\sigma[(\lambda_0-T)^{-1}]$;

(2) 对 $\forall\lambda\in\rho(T)$, 有

$$\begin{aligned}(\lambda-T)^{-1}&=(\lambda_0-T)^{-1}[I-(\lambda_0-\lambda)(\lambda_0-T)^{-1}]^{-1}\\&=[I-(\lambda_0-\lambda)(\lambda_0-T)^{-1}]^{-1}(\lambda_0-T)^{-1},\end{aligned}$$

特别地,

$$\sigma[(\lambda_0-T)^{-1}]=\{(\lambda-\lambda_0)^{-1}|\lambda\in\sigma(T)\}.$$

3. 证明对称线性算子 $T:\mathfrak{D}(T)\to H$ 的点谱 $\sigma_p(T)$ 是实的, 对一切非实的复数 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{r}}(T)\cup\rho(T)$. 若 H 是可分的, 则 $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ 是可数的.(可能是有限的, 甚至是空的.)

4. 若 T_1 是线性算子 $T:\mathfrak{D}(T)\to H$ 的一个线性扩张. 证明

(1) $\sigma_{\mathrm{p}}(T)\subset\sigma_{\mathrm{p}}(T_1)$;

(2) $\sigma_{\mathrm{r}}(T)\supset\sigma_{\mathrm{r}}(T_1)$;

(3) $\sigma_{\mathrm{c}}(T)\subset\sigma_{\mathrm{c}}(T_1)\cup\sigma_{\mathrm{p}}(T_1)$.

5. 设 T 是一个对称算子, D 是一个线性子空间, $\mathfrak{D}(T)\subset D\subset\mathfrak{D}(T^*)$, 在 $\mathfrak{D}(T^*)$ 上引进共轭双线性形式 $\{x,y\}=(T^*x,y)-(x,T^*y)$. 如果在 $D\times D$ 上 $\{x,y\}=0$, 则存在 T 的一个对称扩张 T_1, 使得 $\mathfrak{D}(T_1)=D$.

6. 设 T 是对称算子, T^2 是稠定的算子, 求证 $T^*\overline{T}$ 是 T^2 的 Friedrichs 自共轭扩张.

7. 设 S 是闭的对称算子, 但不是自共轭的, 令 $T=(S^*S)^{\frac{1}{2}}$. 则对 $T+\lambda S$ 来说, 当 $\lambda\in(-1,1)$ 时, 其为自共轭的; 当 $|\lambda|>1$ 时为闭的但不是自共轭的; 当 $|\lambda|=1$ 时不是闭的.

8. T 是下方有界闭对称算子, $T\geqslant -M$, 则在区域 $\mathbb{C}\backslash[-M,\infty)$ 上 $\dim\mathcal{N}(T^*-zI)$ 不变.

9. 设 T 是下方有界闭对称算子, $n_+(T)=n_-(T)$ 有限, 证明 T 的任意一个自共轭扩张都下方有界.

10. 设 T 是 Hilbert 空间上任意稠定闭算子, 证明必存在正自共轭算子 $S,\mathfrak{D}(S)=\mathfrak{D}(T)$ 和等距算子 $V\colon \mathcal{N}(T)^{\perp}\to\overline{\mathcal{R}(T)}$, 使得 $T=VS$, 此式称为闭算子的极化分解. 证明若 $\mathcal{N}(S)=\mathcal{N}(T)$, 则上述分解式唯一.

11. 设 S 和 T 是非负自共轭算子. 我们记 $T\leqslant S$, 若 $\mathfrak{D}(S^{\frac{1}{2}})\subset\mathfrak{D}(T^{\frac{1}{2}})$ 且对于 $\forall f\in\mathfrak{D}(S^{\frac{1}{2}})$, $||T^{\frac{1}{2}}f||\leqslant||S^{\frac{1}{2}}f||$. 证明

(1) 若 $0\in\rho(T)$, 则 $T\leqslant S$ 当且仅当 $S^{-1}\leqslant T^{-1}$;

(2) 若 A 是对称的非负算子, T 是 A 的 Friedrichs 扩张, S 是 A 的任意非负自共轭扩张, 则 $S\leqslant T$.

12. 令 $\varphi(t)=\exp(-t^2)$, 定义 $S\in\mathfrak{B}(L^2)$,

$$(Sf)(t)=\varphi(t)f(t-1),\quad f\in L^2,$$

其中 $L^2=L^2(\mathbb{R})$, 于是 $(S^2f)(t)=\varphi(t)\varphi(t-1)f(t-2),\cdots$ (说明: 此处 S 以极化分解 $S=PU$ 的形式出现), 求 S^*. 计算 $||S^n||=\exp\left\{-\dfrac{(n-1)n(n+1)}{12}\right\}(n=1,2,\cdots)$, 并证明 S 是一一的, $\mathcal{R}(S)$ 在 L^2 中稠, $\sigma(S)=\{0\}$. 定义 T,

$$TSf=f,\quad f\in L^2$$

其中 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{R}(S)$, 证明 $\sigma(T)$ 是空的.

13. 设 T_1,T_2 是稠定的闭算子, 且 $\mathfrak{D}(T_1)=\mathfrak{D}(T_2)$, $||T_1x||=||T_2x||(\forall x\in\mathfrak{D}(T_1))$, 则 $(T_1^*T_1)^{\frac{1}{2}}=(T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}}$; 若 T_1,T_2 是自共轭的、非负的算子, 则 $T_1=T_2$.

14. 若 T 是自共轭算子, 则 $\lambda\in\rho(T)$ 当且仅当 $T-\lambda I$ 是满射.

15. 设 T 是复的 Hilbert 空间 H 上的对称算子, 则 T 是本质自共轭的当且仅当 $\sigma_{\mathrm{p}}(T^*)\subset\mathbb{R}$.

§4.3 自共轭算子的谱分解

4.3.1 自共轭算子的谱族

对于自共轭算子 T, 由于 T 和它的 Cayley 变换 V 是一一对应的, 通过酉算子的谱族和谱表示得到自共轭算子的谱表示.

根据定理 3.5.5, T 是自共轭算子时, 它的 Cayley 变换 U 是酉算子, 由定理 2.8.9, 存在一个 $[0,2\pi]$ 上的谱族 $\{F_\theta\}$, 使得

$$U=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}F_\theta,\tag{4.3.1}$$

且对于 $\forall x, y \in H$, 有

$$(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \, d(F_\theta x, y).$$

作变换 $t = -\cot\dfrac{\theta}{2}$, 令 $E_t = F_{-\cot\frac{\theta}{2}}$. $\{E_\lambda\}$ 形成 $(-\infty, \infty)$ 上的一个谱族, 即满足

(1) $\forall t \in \mathbb{R}$, E_t 是正交投影算子;

(2) 当 $t_1 \leqslant t_2$, $E_{t_1} \leqslant E_{t_2}$;

(3) $E_{t+} = s - \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} E_{t+\varepsilon} = E_t$;

(4) $E_{-\infty} = s - \lim\limits_{t\to-\infty} E_t = s - \lim\limits_{\theta\to 0+} F_\theta = 0$;

(5) $E_{+\infty} = s - \lim\limits_{t\to+\infty} E_t = s - \lim\limits_{\theta\to 2\pi-0} F_\theta = I$.

因为 $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$, $1 \notin \sigma_p(U)$, 当 T 是无界算子时, $1 \notin \rho(U)$, $0 = 2\pi$ 是 U 的连续谱点, $s - \lim\limits_{\theta\to 2\pi-0} F_\theta = F_{2\pi} = I$.

定义 4.3.1　设 $E = \{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个谱族, 对于 $\forall x \in H$, 令

$$\rho_x(t) = (E_t x, x) = ||E_t x||^2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.3.2}$$

函数 $\rho_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界的, 非减的, 右连续的且 $\lim\limits_{t\to-\infty} \rho_x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho_x(t) = \|x\|^2$.

ρ_x 定义了 $\mathbb{R}$ 上的一个测度. 一个函数 $u(t)$ 称为是 E 可测的, 如果对于 $\forall x \in H$, $u(t)$ 是 ρ_x 可测的.

注 1　所有的连续函数, 阶梯函数以及所有的在点点收敛意义下的阶梯函数的极限是 E 可测的. 特别地, 所有的 Borel 函数是 E 可测的.

注 2　若 $u_0(t) \equiv 1$, 则 $u_0(t) \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$. 进一步地, 若 $u(t)$ 是有界 Borel 可测函数, 则 $u(t) \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$.

4.3.2　谱积分

第二章研究过有界自共轭算子的谱族和它的谱表示, 即

$$T = \int_m^M t \, dE_t, \tag{4.3.3}$$

其中积分是积分和数在范数收敛意义下的极限 (我们可以使谱族在 m 点连续, 只要对其谱族做一个相应的“移动”, 则积分下限不必为 $m-0$, 而写成 m).

在这一章里, 我们将证明对于无界自共轭算子 T 有

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t. \tag{4.3.4}$$

问题是 (4.3.4) 右边的意义是什么? 下面用逼近的方法给出 (4.3.4) 的意义.

引理 4.3.2 设 H 是 Hilbert 空间, $u(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界的 Borel 可测函数, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \int_{-n}^{n} u(t)\,\mathrm{d}E_t \tag{4.3.5}$$

在按算子范数收敛的意义下是一个有界线性算子, 且 $\{T_n x\}$ 是 H 中的 Cauchy 列.

证明 由定理 2.8.3 的注可知, (4.3.5) 定义了一个有界线性算子, 并且

$$\begin{aligned}\|T_n x\|^2 &= \left(\int_{-n}^{n} u(t)\,\mathrm{d}E_t x, \int_{-n}^{n} u(t')\,\mathrm{d}E_{t'} x\right)\\ &= \int_{-n}^{n} u(t) \int_{-n}^{n} u(t')\,(\mathrm{d}E_t x, \mathrm{d}E_{t'} x)\\ &= \int_{-n}^{n} |u(t)|^2 \mathrm{d}(\|E_t x\|^2).\end{aligned}$$

由于

$$s-\lim_{t\to-\infty} E_t = 0, \quad s-\lim_{t\to+\infty} E_t = I.$$

对于 $\forall x \in H$ 及 $\forall p \in \mathbb{N}$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$||(T_n - T_{n+p})x||^2 = \int_{n\leqslant|t|\leqslant n+p} |u(t)|^2\,\mathrm{d}(\|E_t x\|^2) \to 0.$$

□

于是, 可以定义

$$u(T) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{d}E_t = s-\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} u(t)\,\mathrm{d}E_t. \tag{4.3.6}$$

显然

$$\|u(T)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \mathrm{d}(\|E_t x\|^2). \tag{4.3.7}$$

注 1 若 $|u(t)| \leqslant M, t \in (-\infty, \infty)$, 则 $\|u(T)\| \leqslant M$.

注 2 当 $u(t)$ 是实函数时, $u(T)$ 是自共轭的.

注 3 若 u_j 是 Borel 有界可测函数, 且 $u_j(t) \to u(t)$ $(j \to \infty)$, $|u_j(t)| \leqslant M < \infty$ $(j = 1, 2, \cdots)$, 则由控制收敛定理 $s-\lim\limits_{j\to\infty} u_j(T) = u(T)$.

引理 4.3.3 设 H 是一个 Hilbert 空间, E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个谱族, $u(t)$ 是 Borel 可测函数, 令

$$D_u = \left\{x \in H \middle| \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\,\mathrm{d}(\|E_t x\|^2) < \infty\right\}, \tag{4.3.8}$$

则 D_u 是 H 中的稠子集, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, 极限

$$\lim_{n\to\infty} u_n(T)x$$

存在, 其中

$$u_n(t) = \begin{cases} u(t), & |u(t)| \leqslant n, \\ 0, & |u(t)| > n. \end{cases} \tag{4.3.9}$$

证明　记 $F_n = \{t \in \mathbb{R} \mid |u(t)| \leqslant n\}$, $\chi_{F_n}(t)$ 是有界 Borel 可测函数, 且由 (4.3.7) 对于 $\forall x \in H$, 令 $x_n = \chi_{F_n} x \in D_u$, 且

$$\|\chi_{F_n} x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |u_n(t)| \, \mathrm{d}(\|E_t x\|^2) \leqslant \|x\| < \infty.$$

由于 $\chi_{F_n}(t) \to 1\ (n \to \infty)$(几乎处处), 由上面注 3 知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \chi_{F_n} x = x,$$

即 D_u 在 H 中稠. 同时对于 $\forall x \in D_u$,

$$\begin{aligned} \|u_n(T)x - u_{n+p}(T)x\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |u_n(t) - u_{n+p}(t)|^2 \, \mathrm{d}(\|E_t x\|^2) \\ &= \int_{n \leqslant |u(t)| \leqslant n+p} |u(t)|^2 \, \mathrm{d}(\|E_t x\|^2) \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

于是对于 $\forall x \in D_u$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(T)x$ 存在.　□

注　由于 Borel 集和 E 可测集仅相差一个 E 零测集, 上述结论可以推广到 $u(t)$ 是 E 可测函数. 于是可以定义

定义 4.3.4　设 H 是一个 Hilbert 空间, $\{E_t\}$ 是如上定义的谱族, $u(t)$ 是 E 可测函数, 定义

$$u(T) = s - \lim_{n\to\infty} u_n(T), \tag{4.3.10}$$

$$\mathfrak{D}(u(T)) = D_u = \left\{ x \in H \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \, \mathrm{d}(\|E_t x\|^2) < \infty \right\}, \tag{4.3.11}$$

其中 $u_n(t)$ 由 (4.3.9) 给出.

注　可以证明 $u(T)^* = \overline{u}(T)$, 其中 $\overline{u}(t)$ 是 $u(t)$ 的复共轭.

定理 4.3.5　(4.3.10) 和 (4.3.11) 定义的线性算子 $u(T)$ 是闭的线性算子.

证明　设 $(x, y) \in \overline{G(u(T))}$, 则存在 $x_n \in D_u$, 使得

$$(x_n, u(T)x_n) \to (x, y), \tag{4.3.12}$$

即在图中的范数

$$\|\langle x_n - x, u(T)x_n - y\rangle\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|u(T)x_n - y\|^2 \to 0. \tag{4.3.13}$$

从而 $x_n \to x, u(T)x_n \to y$. 对于正整数 N, $u_N(T)$ 是有界线性算子, 所以 $u_N(T)\,x_n \to u_N(T)x\ (n \to \infty)$. 于是有, 当 n, m 充分大时,

$$\|u_N(T)x_n - u_N(T)x_m\| \leqslant \|u(T)x_n - u(T)x_m\| < \varepsilon. \tag{4.3.14}$$

令 $m \to \infty$, 关于 N 一致有

$$\|u_N(T)x_n - u_N(T)x\| \leqslant \varepsilon. \tag{4.3.15}$$

因此

$$\|u_N(T)x\| \leqslant \varepsilon + \|u_N(T)x_n\|.$$

令 $N \to \infty$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(T)|^2\ \mathrm{d}(\|E_t x\|^2) < \infty, \tag{4.3.16}$$

因此 $x \in D_u$, 且在 (4.3.15) 中令 $N \to \infty$, 则 $\|u(T)x_n - u(T)x\| \leqslant \varepsilon$, 即 $u(T)x = \lim\limits_{n\to\infty} u(T)\ x_n = y$, $u(T)$ 是闭算子. □

定理 4.3.6 当 $u(T)$ 是实值 E 可测函数时, $u(T)$ 是自共轭的.

证明 由定理 2.8.3 注知, $u_n(T)$ 是自共轭的,

$$(u(T)x, y) = \lim_{n\to\infty}(u_n(T)x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, u_n(T)y) = (x, u(T)y),$$

即 $u(T)$ 是对称的, 以下证明 $\mathfrak{D}(u(T)^*) \subset \mathfrak{D}(u(T))$. 对于 $\forall y \in \mathfrak{D}(u(T)^*)$, 令

$$x_n = u_n(T)y = \chi_{F_n}(T)u_n(T)y \in \mathfrak{D}(u(T)),$$

且

$$(u(T)x_n, y) = (x_n, u(T)^*y). \tag{4.3.17}$$

由于 $u_n(T)$ 是自共轭的,

$$(u(T)x_n, y) = \lim_{n\to\infty}(u_n(T)x_n, y) = ||x_n||^2.$$

由 (4.3.17) 推出

$$\|x_n\| \leqslant ||u_n(T)^*y||,$$

即对于 $\forall n$,

$$\|u_n(T)y\| \leqslant ||u(T)^*y||.$$

令 $n\to\infty$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|^2\,\mathrm{d}(\|E_ty\|^2)<\infty,$$

即 $y\in\mathfrak{D}(u(T))$. □

4.3.3 自共轭线性算子的谱分解

在做了上述准备之后, 可以得到本节最重要的定理 —— 自共轭线性算子的谱分解定理.

定理 4.3.7 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是 H 上的自共轭算子, 则存在唯一的谱族 $\{E_t\}$, 使得

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}t\,\mathrm{d}E_t,\tag{4.3.18}$$

其中积分的意义由定理 4.3.5 中给出.

证明 由于 T 是自共轭算子, 由 T 的 Cayley 变换, 得到上述的谱族 $\{E_t\}$. 并按定理 4.3.6, 其中 $u(t)=t$ 可定义一个自共轭算子

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}t\,\mathrm{d}E_t,\tag{4.3.19}$$

$$\mathfrak{D}(S)=\left\{x\in H\Big|\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,\mathrm{d}(\|E_tx\|^2)<\infty\right\}.\tag{4.3.20}$$

注意到

$$t=-\cot\frac{\theta}{2}=\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}},\tag{4.3.21}$$

即对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(S)$

$$Sx=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}F_\theta x,$$

其中 F_θ 是 T 的 Cayley 变换对应的谱族.

下面证明这样定义的 S 即是 T, 为此只需证明, S 和 T 有相同的 Cayley 变换. 对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(S)$,

$$(S+\mathrm{i}I)x=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\frac{2}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}F_\theta x,\tag{4.3.22}$$

$$(S-\mathrm{i}I)x=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}F_\theta x.\tag{4.3.23}$$

于是 S 的 Cayley 变换是

$$(S-\mathrm{i}I)(S+\mathrm{i}I)^{-1}=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}F_\theta x=Ux,\quad\forall x\in\mathfrak{D}(S).\tag{4.3.24}$$

根据 (4.3.1), 以及 T 与 Cayley 变换是一一对应的可知 $S=T$.

下面证明谱族 $\{E_t\}$ 是唯一的. 如果存在两个谱族 $\{E_t\}$ 和 $\{E_t'\}$ 使得

$$T=\int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}E_t=\int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}E_t'. \tag{4.3.25}$$

令

$$F_\theta=E_{-\cot\frac{\theta}{2}},\quad F_\theta'=E'_{-\cot\frac{\theta}{2}},$$

则它们都是单位圆上的谱族, 并且

$$U=\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}F_\theta=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}F_\theta' \tag{4.3.26}$$

是酉算子, 从而对于任何 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$U^n=\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}F_\theta=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}F_\theta'. \tag{4.3.27}$$

于是对于 $\forall x,y\in H$, 任何单位圆上的连续函数 φ, 可推知

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}(F_\theta x,y)=\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}(F_\theta' x,y). \tag{4.3.28}$$

再由单位圆上全体连续函数组成的空间上的线性泛函的唯一性, 推出 $F_\theta=F_\theta'$ ($\forall\theta\in[0,2\pi]$). 故对于 $\forall t\in\mathbb{R}$, $E_t=E_t'$. □

与有界自共轭算子的证明相同, 根据谱族的性质, 可以有

定理 4.3.8 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\{E_\lambda\}$ 是 T 的谱族, 那么

(1) $\lambda\in\sigma(T)$ 当且仅当对于 $\forall\varepsilon>0$, $E_{\lambda+\varepsilon}-E_{\lambda-\varepsilon}\neq 0$;

(2) $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ 当且仅当 $E_\lambda-E_{\lambda-0}\neq 0$.

推论 4.3.9 自共轭算子 T 的孤立谱点是 T 的特征值.

证明 λ 是 T 的孤立谱点, $\exists\varepsilon>0$, $[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]\cap\sigma(T)=\{\lambda\}$, 因此谱族 E 在 $[\lambda-\varepsilon,\lambda)$ 和 $(\lambda,\lambda+\varepsilon]$ 是常值算子, 由定理 4.3.8, 有

$$E_\lambda-E_{\lambda-0}=E_{\lambda+\varepsilon}-E_{\lambda-\varepsilon}\neq 0,$$

即 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(T)$. □

习 题 4.3

1. 设 E 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子 T 的谱族, M 是 H 的闭子空间, 则 $M=\mathcal{R}(E(t))$ 当且仅当 M 是 T 的约化子空间, 且对 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)\cap M$, 有 $(x,Tx)\leqslant t\|x\|^2$; 对 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)\cap M^\perp$, 有 $(x,Tx)\geqslant t\|x\|^2$.

2. 设 T 是复 Hilbert 空间 H 的子集 $\mathfrak{D}(T)$ 到 H 中的自共轭算子, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 T 的谱族, 证明 $\overline{[\mathcal{R}(T)]} = [(I - E_0) + E_{0-}]H$, $\mathcal{N}(T) = (E_0 - E_{0-})H$, 这里 $E_{0-} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon$.

3. 设 T 是复 Hilbert 空间 H 的线性子空间 $\mathfrak{D}(T)$ 到 H 中的自共轭算子, 设 B 是 H 中任何一个与 T 可交换的有界线性算子, 设 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 是 T 的谱族, 证明 $BE_\lambda = E_\lambda B$. (提示: 证明 B 与 T 的 Cayley 变换 U 可交换.)

4. 设 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的一可测子集, $g: M \to \mathbb{R}$ 是可测函数. 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 设 $M(t) = \{x \in M | g(x) \leqslant t\}$. $M(t)$ 显然是 M 的可测子集. 证明 $E(t)u = \chi_{M(t)}u\,(\forall u \in L^2(M), t \in \mathbb{R})$ 定义了 $L^2(M)$ 上的一个谱族.

5. 设 $\{\rho_\alpha : \alpha \in A\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一族右连续的非减函数, 证明

$$E(t)(f_\alpha) = \chi_{(-\infty,t]}(f_\alpha) = (\chi_{(-\infty,t]}f_\alpha), \quad \forall (f_\alpha) \in \oplus_{\alpha\in A}L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha), t \in \mathbb{R}$$

定义了 $\oplus_{\alpha\in A}L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$ 上的一个谱族.

6. 设 E 是上述第 5 题中的谱族, 函数 $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 E 可测的当且仅当对任意 $\alpha \in A$ 来说是 ρ_α 可测的.

7. 设 T 是非负自共轭算子, 并令 $\lambda > 0$, 则

$$(\lambda + T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\cos(\lambda^{-\frac{1}{2}}sT^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}s,$$

此处积分是在广义 Riemann-Stieltjes 积分意义下的.

8. 设 E 是自共轭算子 T 的谱族, $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 E 可测的, 则

$$\sigma(u(T)) \subset \overline{u(\sigma(T))};$$

若 u 在 $\sigma(T)$ 上是连续的, 则有

$$\sigma(u(T)) = \overline{u(\sigma(T))};$$

若 T 是有界的, 并且 u 是连续的, 则

$$\sigma(u(T)) = u(\sigma(T)).$$

9. 设 E 是自共轭算子 T 的谱族, $u, v: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 E 可测的.

(1) 若对任意 $t \in \sigma(T)$, 有 $u(t) = v(t)$, 则 $u(T) = v(T)$;

(2) 若 T 有纯点谱, 则在 (1) 中假定 $u(t) = v(t)$ $(\forall t \in \sigma_{\mathrm{p}}(T))$ 是充分的.

§4.4　正常算子的谱分解

4.4.1　正常算子和它的谱族

在第一、二章里, 我们研究过有界的正常算子, 对于无界的线性算子, 定义域有着特别的重要性.

定义 4.4.1 设 H 是 Hilbert 空间, T 是 H 上闭的稠定线性算子, T 称为是正常算子, 如果

$$T^*T = TT^*. \tag{4.4.1}$$

注 1 这个定义对有界正常算子也是成立的, 显然自共轭算子是正常的.

注 2 T 是正常的, 则对于 $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda + T$ 也是正常的.

定理 4.4.2 设 T 是 Hilbert 空间 H 上稠定的线性算子, 则 T 是正常的当且仅当

(1) $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$; (4.4.2)

(2) $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$. (4.4.3)

证明 充分性. 如果 $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$, 且 $\|Tx\| = \|T^*x\|$. 对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, 由 (1.1.17) 可推出

$$(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*).$$

由于 T 是闭的, $T^{**} = T$, 有

$$(T^*Tx, y) = (TT^*x, y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*),$$

结合 $\mathfrak{D}(T)$ 稠密, 推知 $T^*T = TT^*$.

必要性. 如果 $T^*T = TT^*$, 于是

$$\|Tx\|^2 = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = \|T^*x\|^2, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T^*T).$$

注意到 $\mathfrak{D}(T^*T)$ 是 T 和 T^* 的核 (即如果令 $T_1 = T|_{\mathfrak{D}(T^*T)}$, $\overline{T}_1 = T$) 且在 $\mathfrak{D}(T^*T)$ 上 $\|Tx\| = \|T^*x\|$, 可以推出 $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$ 且对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$. □

定理 4.4.3 设 T、M 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, 若 $T \subset M$, 则 $T = M$ (即 T 是最大的正常算子).

证明 由 $T \subset M$, 有 $M^* \subset T^*$, 由于 M, T 均是正常的,

$$\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M^*) \subset \mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(M),$$

于是 $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(T)$. □

定理 4.4.4 设 T 是 Hilbert 空间 H 中稠定的, 闭的线性算子, 则 T 是正常的当且仅当 T^* 是正常的. □

证明 注意到 $T^{**} = T$, 结论是明显的.

与有界正常算子的证明相同, 我们有

定理 4.4.5 设 T 是 Hilbert 空间上的正常算子, 则

(1) $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathcal{N}(T-\lambda I)=\mathcal{N}(T^*-\overline{\lambda}I)$;

(2) λ_1 , λ_2 是 T 的不相同的特征值, x_1,x_2 是它们相应的特征元素, 则 $x_1\perp x_2$.

对于自共轭算子 T, 存在一个实的谱族 $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, T 可以表示为 $T=\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}E_t$. 对于每一个正常算子 T, 我们将要证明它相应地可以表示为在复平面上的积分, $T=\int_{\mathbb{C}}\lambda\,\mathrm{d}G_\lambda$, 其中 G_λ 是一个定义在复平面 $\mathbb{C}$ 上的复的谱族.

定义 4.4.6 设 H 是一个 Hilbert 空间, 映射 $G:\mathbb{C}\to\mathfrak{B}(H)$ 称为是一个复的谱族, 如果存在实的谱族 $E=\{E_\lambda\}$ 和 $F=\{F_\lambda\}$, 使得对于 $\forall t,s\in\mathbb{R}$,

$$G(t+\mathrm{i}s)=E_tF_s=F_sE_t. \tag{4.4.4}$$

定理 4.4.7 设 G 是 Hilbert 空间 H 上的复的谱族, $G(t+\mathrm{i}s)=E_tF_s$, 那么

(1) 对于 $\forall t,t',s,s'\in\mathbb{R}$, $G(t+\mathrm{i}s)G(t'+\mathrm{i}s')=G(\min\{t,t'\}+\mathrm{i}\min\{s,s'\})$. 特别地, 如果 $z,z'\in\mathbb{C}$, 使得 $\mathrm{Re}z\leqslant\mathrm{Re}z'$, 且 $\mathrm{Im}z\leqslant\mathrm{Im}z'$, 那么 $G(z)\leqslant G(z')$ (单调).

(2) 如果 $z_n\to z$, 并且 $\mathrm{Re}z_n\geqslant z,\mathrm{Im}z_n\geqslant z$, 则 $s-\lim\limits_{n\to\infty}G(z_n)=G(z)$ (右连续).

(3) 如果 $\mathbb{C}$ 中的序列 $\{z_n\}$ 满足 $\mathrm{Re}z_n\to-\infty$, 或者 $\mathrm{Im}z_n\to-\infty$, 则 $s-\lim\limits_{n\to\infty}G(z_n)=0$. 如果 $\{z_n\}$ 满足 $\mathrm{Re}z_n\to+\infty$ 并且 $\mathrm{Im}z_n\to+\infty$, 那么 $s-\lim\limits_{n\to\infty}G(z_n)=I$.

(4) 谱族 E 和 F 是被 $G(t+\mathrm{i}s)$ 唯一确定的, 即 $E_t=s-\lim\limits_{s\to\infty}G(t+\mathrm{i}s)$, $F_s=s-\lim\limits_{t\to\infty}G(t+\mathrm{i}s)$.

(5) 设 $G(J)=E(J_1)F(J_2)$, 其中 $J=J_1\times J_2=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}z\in J_1,\mathrm{Im}z\in J_2)$. 则 $G(J_1)G(J_2)=0$, 如果 $J_1\cap J_2=\varnothing$.

证明 (1) 对于 $\forall s,s',t,t'\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&G(t+\mathrm{i}s)G(t'+\mathrm{i}s')=E_tF_sE_{t'}F_{s'}=E_tE_{t'}F_sF_{s'}\\=&E(\min\{t,t'\})F(\min\{s,s'\})=G(\min(t,t')+\mathrm{i}\min\{s,s'\}).\end{aligned}$$

(2) 令 $\varepsilon_n\geqslant0$, $\varepsilon_n\to0$, $\eta_n\geqslant0$, $\eta_n\to0\,(n\to\infty)$, 注意到 E 和 F 是实的正交投影算子族, 则对于 $\forall z=t+\mathrm{i}s$, $x\in H$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}||(G(z+\varepsilon_n+\mathrm{i}\eta_n)-G(z))x||^2&=\lim_{n\to\infty}(E_{t+\varepsilon_n}F_{s+\eta_n}x-E_tF_sx,x)\\&=\lim_{n\to\infty}((F_{s+\eta_n}x,E_{t+\varepsilon_n}x)-(F_sx,E_tx))=0.\end{aligned}$$

(3) 设 $z_n=t_n+\mathrm{i}s_n$, $t_n\to-\infty$, 或者 $s_n\to-\infty$, 对于 $x\in H$,

$$\lim_{n\to\infty}\|G(z_n)x\|^2=\lim_{n\to\infty}(E_{t_n}F_{s_n}x,x)=\lim_{n\to\infty}(F_{s_n}x,E_{t_n}x),$$

最后一项 $F_{s_n}x, E_{t_n}x$, 根据条件至少有一个要趋近到零, 而另一项有界, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\|G(z_n)x\|^2=0.$$

对于 $t_n\to+\infty,\ s_n\to+\infty, \forall x\in H$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|x-G(z_n)x\|^2=\lim_{n\to\infty}\{\|x\|^2-(F_{s_n}x,E_{t_n}x)\}=0.$$

(4) 因为 $s-\lim\limits_{s\to\infty}F_s=I$, 于是对于 $\forall x\in H$, $E_tx=\lim\limits_{s\to\infty}F_sE_tx=\lim\limits_{s\to\infty}G(t+\mathrm{i}s)x$. 类似地, 可以证明 $F_s=s-\lim\limits_{t\to\infty}G(t+\mathrm{i}s)x$.

(5) 如果 $J=J_1\times J_2, J'=J_1'\times J_2'$, 且 $J\cap J'=\varnothing$, 那么 $J_1\cap J_1'=\varnothing$, 或者 $J_2\cap J_2'=\varnothing$, 于是 $G(J)G(J')=E(J_1)E(J_1')F(J_2)F(J_2')=0$. □

注 对于给定的 $x\in H$, $\mathbb{C}$ 中的任何区间 J, 由 $\omega_x(J)=\|G(J)x\|^2$ 定义了一个规则的区间函数, 即定义了 $\mathbb{C}$ 上的一个测度, 记为 ω_x.

定义 4.4.8 一个函数 $u(\lambda):\mathbb{C}\to\mathbb{K}$ 称为是 G 可测的, 如果对于 $\forall x\in H$, $u(t)$ 是 ω_x 可测的.

显然阶梯函数、连续函数、Borel 函数是 G 可测的.

对于阶梯函数 u: $\mathbb{C}\to\mathbb{K}$,

$$u(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_j\chi_{J_j}(\lambda). \tag{4.4.5}$$

利用谱族 G 可以定义

$$\int_{\mathbb{C}}u(\lambda)\,\mathrm{d}G_\lambda=\sum_{j=1}^{n}c_jG(J_j). \tag{4.4.6}$$

它是投影算子的加权和.

对于 $u(\lambda)\in L^2(\mathbb{C},\omega_x)$, 结合 (4.4.6) 可以类似地定义

$$u(T)=\int_{\mathbb{C}}u(\lambda)\,\mathrm{d}G_\lambda x, \tag{4.4.7}$$

其收敛是在强收敛意义下的.

进一步地, 对于任何的 G 可测函数 $u(\lambda)$: $\mathbb{C}\to\mathbb{K}$, 定义

$$D_u=\mathfrak{D}(u(T))=\left\{x\in H\middle|u(t)\in L^2(\mathbb{C},\omega_x)\right\}, \tag{4.4.8}$$

$$u(T)x=\int_{\mathbb{C}}u(\lambda)\,\mathrm{d}G(\lambda)x,\quad \forall x\in D_u. \tag{4.4.9}$$

$u(T)$ 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, 记为

$$u(T)=\int_{\mathbb{C}}u(\lambda)\,\mathrm{d}G_\lambda, \tag{4.4.10}$$

其收敛是在强收敛意义下的.

4.4.2　有界正常算子的谱分解

定理 4.4.9　令 H 是一个 Hilbert 空间, T 是 H 上的有界正常算子, 那么存在唯一的谱族 G, 使得

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda \mathrm{d} G_\lambda. \tag{4.4.11}$$

谱积分是在范数收敛意义下积分和数的极限.

证明　根据定理 1.5.15, 正常算子的笛卡儿分解, T 可以表示成

$$T = A + \mathrm{i}B, \tag{4.4.12}$$

其中 A 和 B 是可交换的自共轭算子, 且 $\|A\| \leqslant \|T\|$, $\|B\| \leqslant \|T\|$, $\|T\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$, 根据定理 2.7.4, A 和 B 分别存在实的谱族 E 和 F, 由于 A 和 B 是可以交换的, 于是

$$A_\lambda B_\lambda = (A - \lambda I)(B - \lambda I) = (B - \lambda I)(A - \lambda I) = B_\lambda A_\lambda.$$

结合定理 2.7.4 确定的实的谱族, 有

$$E_t F_s = F_s E_t, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

令

$$G_\lambda = G(t + \mathrm{i}s) = E_t F_s = F_s E_t, \tag{4.4.13}$$

其中 $\lambda = t + \mathrm{i}s$, $t, s \in \mathbb{R}$, 则 G_λ 是一个复的谱族. 由于 $\|A\| \leqslant \|T\|$, $\|B\| \leqslant \|T\|$, 有

当 $\mathrm{Re}\lambda = t \geqslant \|T\|$ 且 $\mathrm{Im}\lambda = s \geqslant \|T\|$ 时,

$$G(t + \mathrm{i}s) = E_t F_s = I. \tag{4.4.14}$$

当 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant -\|T\|$ 且 $\mathrm{Im}\lambda = s \leqslant -\|T\|$ 时,

$$G(t + \mathrm{i}s) = E_t F_s = 0. \tag{4.4.15}$$

显然

$$G(\{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\lambda \in J\}) = E(J). \tag{4.4.16}$$

我们选择阶梯函数 $u_n(t) \to t$(一致地), 于是由 (4.4.13), 有

$$\boldsymbol{A} = \int_{\mathbb{R}} t \,\mathrm{d}E_t = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \,\mathrm{d}E_t = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} u_n(\mathrm{Re}\lambda) \,\mathrm{d}G_\lambda = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{Re}\lambda \,\mathrm{d}G_\lambda. \tag{4.4.17}$$

类似地, 有

$$B = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\lambda \,\mathrm{d}G_\lambda. \tag{4.4.18}$$

因此

$$T = A + \mathrm{i}B = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{Re}\lambda \, \mathrm{d}G_\lambda + \int_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\lambda \, \mathrm{d}G_\lambda = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, \mathrm{d}G_\lambda.$$

由于 $T^* = A - \mathrm{i}B$, 可以证明 $T^* = \int_{\mathbb{C}} \overline{\lambda} \, \mathrm{d}G_\lambda$.

下面证明唯一性, 如果存在另外的谱族 $G'_\lambda = G'(t+\mathrm{i}s)$, $G'(t+\mathrm{i}s) = E'_t F'_s = F'_s E'_t$, 使得

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, \mathrm{d}G'_\lambda.$$

但是

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} (\lambda + \overline{\lambda}) \, \mathrm{d}G'_\lambda = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{Re}\lambda \, \mathrm{d}G'_\lambda = \int_{\mathbb{R}} t \, \mathrm{d}E'_\lambda.$$

由于自共轭算子谱族的唯一性, 推出 $E = E'$, 同理得到 $F = F'$. □

例 4.4.10 设 T 是 Hilbert 空间 H 中紧的正常算子, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 是 T 的非零特征元素, P_j 是 $\mathcal{N}(T - \lambda_j I)$ 上的投影算子, 另外令 $\lambda_0 = 0$, P_0 是 $\mathcal{N}(T)$ 上的投影算子, 于是

$$G_\lambda = \sum \{P_j \big| j \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Re}\lambda_j \leqslant \mathrm{Re}\lambda,\ \mathrm{Im}\lambda_j \leqslant \mathrm{Im}\lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{4.4.19}$$

定义了一个复的谱族, 且

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, \mathrm{d}G_\lambda.$$

对于无界的正常算子, 使用与 4.3 节相似的方法, 结合自共轭算子 TT^* 的谱族, 通过有界的正常算子逼近, 我们可得到类似的定理

定理 4.4.11 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, 那么存在唯一的复的谱族 G, 使得

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, \mathrm{d}G_\lambda, \tag{4.4.20}$$

其收敛是在强收敛意义下的.

进一步地, 令 $A = \dfrac{1}{2}(T + T^*), B = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*)$, 则 A 和 B 是自共轭的, 且 $T = A + \mathrm{i}B, T^* = A - \mathrm{i}B$.

A 和 B 的谱族记为 E 和 F, 有

$$G(t + \mathrm{i}s) = E_t F_s = F_s E_t.$$

证明略, 有兴趣的读者可参阅 [27].

习 题 4.4

1. 设 T 是 H 中稠定闭算子, 且 $T^*T \subset TT^*$. 问能否得到 T 是正常的?

2. 设 $L \in \mathfrak{B}(H), M, N$ 是 H 上无界正常算子, 若 $LM \subset LN$, 证明 $LM^* \subset N^*L$.

3. 一稠定闭算子是正常的当且仅当 $\mathfrak{D}(T^*T) = \mathfrak{D}(TT^*)$ 且

$$||T^*Tx|| = ||TT^*x|| \ (\forall x \in \mathfrak{D}(T^*T)).$$

4. 若 $\dim H = \infty$, 则复平面 $\mathbb{C}$ 的每一个非空闭子集都是 H 中某个正常算子的谱.

5. 证明 H 上闭稠定算子 T 是无界正常算子的充分必要条件是 T 有分解式 $T = A + \mathrm{i}B, A, B$ 是自共轭的, 而且它们的谱族可以交换.

6. 设 T 是无界正常算子, 证明存在酉算子 U 和正的自共轭算子 P, 使得 $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{D}(T)$, $T = UP = PU$.

7. 函数 G: $\mathbb{C} \to \mathfrak{B}(H)$ 是一个复的谱族当且仅当 $G(z)\,(\forall z \in \mathbb{C})$ 是一个正交投影且定理 4.4.7 中 (1)、(2)、(3) 都成立.

8. 设 H 为复 Hilbert 空间, $S, T \in \mathfrak{B}(H), ST = TS$, 且 T 是正常的. 证明

(1) $ST^* = T^*S$;

(2) 若 G 是 T 的谱族, 则 $SG(z) = G(z)S$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

9. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上具有紧的正常预解式的线性算子. 证明

(1) $\forall\, \lambda \in \rho(T), (\lambda I - T)^{-1}$ 是紧的正常算子;

(2) T 有至多可数个谱点. (注: 若 $\exists\, \lambda_0 \in \rho(T)$, 使得 $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 是紧的正常算子, 则称 T 有紧的正常预解式.)

10. 设 T 是 Hilbert 空间上的正常算子, 证明

(1) 若 $\varphi \in C(\sigma(T))$, 则 $\sigma(\varphi(T)) = \varphi(\sigma(T))$;

(2) 若 $\varphi \in C(\sigma(T)), \psi \in C(\sigma(\varphi(T)))$, 则 $(\psi \circ \varphi)(T) = \psi(\varphi(T))$.

11. 若 T 是 H 上的正常算子, 并且存在 $z_0 \in \rho(T)$, 使得 $(z_0 - T)^{-1}$ 是紧的, 则对任意 $z \in \rho(T), (z - T)^{-1}$ 是紧的, 并且存在一序列 $\{\lambda_j\}\,(\lambda_j \in \mathbb{C})$, 使得 $|\lambda_j| \to \infty\,(j \to \infty)$, 存在有穷秩正交投影序列 $\{P_j\}$, 使得 $P_jP_k = \delta_{jk}P_j$, $\mathfrak{D}(T) = \{x \in H| \sum\limits_j |\lambda_j|^2||P_jx||^2 < \infty\}$ 且 $Tx = \sum\limits_j \lambda_j P_j x \ (\forall\, x \in \mathfrak{D}(T))$.

12. 设 $\{\lambda_\alpha | \alpha \in A\}$, 这里 $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 且对于 $\alpha \neq \beta$, 有 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$. 令 $\{P_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 Hilbert 空间 H 上使得 $P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta}P_\alpha\,(\forall\, \alpha, \beta \in A)$ 的正交投影族.

(1) 等式

$$\mathfrak{D}(T) = \Big\{x \in H \Big| \sum_{\alpha \in A} |\lambda_\alpha|^2 ||P_\alpha x||^2 < \infty\Big\},$$

$$Tx = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha P_\alpha x, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T)$$

定义了 H 上的一个正常算子;

(2) 任意使得 $P_\alpha \neq 0$ 的 λ_α 是 T 的特征值且 $\mathcal{N}(\lambda_\alpha - T) = \mathfrak{R}(P_\alpha)$;

(3) T 是紧的.

13. 设 T 是无界正常算子, E 是它的谱族, 证明

(1) $z \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \Leftrightarrow E(\{z\}) \neq 0$;

(2) $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \varnothing$;

(3) $z \in \sigma(T) \Leftrightarrow \forall$ Borel 集 $\Delta, z \in \Delta$, 有 $E(\Delta) \neq 0$.

14. 设算子 $T_m\,(m \in \mathbb{N})$, $T \in \mathfrak{B}(l^2(\mathbb{Z}))$, 其定义如下:

$$T_m(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

其中

$$y_n = \begin{cases} x_{n+1}, & n \neq -1, \\ \dfrac{1}{m}x_0, & n = -1, \end{cases}$$

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\widetilde{y}_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

其中

$$\widetilde{y}_n = \begin{cases} x_{n+1}, & n \neq -1, \\ 0, & n = -1. \end{cases}$$

(1) 有 $||T|| = ||T_m|| = 1$. 因此

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}, \quad \sigma(T_m) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\};$$

(2) 对 $\forall\, z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, 向量 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 T 属于特征值 z 的特征元素, 这里

$$x_n = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ z^n, & n \geqslant 0. \end{cases}$$

因而 $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} | z| \leqslant 1\}$;

(3) $T_m^{-1} \in \mathfrak{B}(l^2(\mathbb{Z}))\,(\forall\, m \in \mathbb{N})$ 且 T_m^{-1} 的谱半径 $r(T_m^{-1}) = 1$. 于是

$$\{z \in \mathbb{C} || z| > 1\} \subset \rho(T_m^{-1}), \quad \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\} \subset \rho(T_m).$$

15. 设 T 是复 Hilbert 空间 H 上的有界正常算子, $r > ||T||$, 假定 u 是 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ 内的全纯函数, 这里 $u(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} u_j z^j\ (|z| < r)$, 则

$$u(T) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j T^j.$$

此级数在 $\mathfrak{B}(H)$ 中收敛.

16. 若 T 是复 Hilbert 空间上的正常算子, $n \in \mathbb{N}$, 则存在唯一的正常算子 A, 使得 $A^n = T$, 并且 A 的谱族 G 满足

$$G(\{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} | r \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi/n\}) = I.$$

§4.5　线性算子的本质谱

4.5.1　本质谱的定义和性质

定义 4.5.1　T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, $\sigma(T)$ 中的全体聚点和无穷维的孤立特征值点称为 T 的本质谱 (essential spectrum), 记为 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)$. 本质谱在谱集中的补集称为 T 的离散谱, 记为 $\sigma_{\mathrm{d}}(T)=\sigma(T)\backslash\sigma_{\mathrm{e}}(T)$, 即 $\sigma_{\mathrm{d}}(T)$ 是全体有限维的孤立特征值点, 如果 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)=\varnothing$, 则称 T 的谱是离散的.

定理 4.5.2　T 是 Hilbert 空间 H 上定义的自共轭算子, 则下列叙述是等价的

(1) $\lambda\in\sigma_{\mathrm{e}}(T)$;

(2) 存在点列 $\{x_n\}\subset\mathfrak{D}(T)$, $x_n\xrightarrow{w}0, \|x_n\|=1$ 且 $||(T-\lambda I)x_n||\to 0$;

(3) 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\dim\mathcal{R}(E_{\lambda+\varepsilon}-E_{\lambda-\varepsilon})=\infty$.

证明　由 (1) 证明 (2). 如果 λ 是 T 的无穷维特征值, 存在正交点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{N}(T-\lambda I)$, $||x_n||=1$, 由例 1.6.18 可知 $x_n\xrightarrow{w}0$, 且 $(T-\lambda I)x_n=0\to 0\,(n\to\infty)$. 如果 λ 是 $\sigma(T)$ 的聚点, 则存在 $\lambda_n\in\sigma(T),\lambda_n\to\lambda$, 且 $\lambda_n\neq\lambda$, $\lambda_n\neq\lambda_m$ $(n\neq m)$, 可以选取 $\varepsilon_n>0$, 使得区间 $(\lambda_n-\varepsilon_n,\lambda_n+\varepsilon_n)$ 互不相交, 因为 $E_{\lambda_n+\varepsilon_n}-E_{\lambda_n-\varepsilon_n}\neq 0$, 我们可选取 $x_n\in\mathcal{R}(E_{\lambda_n+\varepsilon_n}-E_{\lambda_n-\varepsilon_n})$ 且 $\|x_n\|=1$. 由于谱族是正交投影算子族, 我们有 $(x_n,x_m)=\delta_{nm}$. 于是 $x_n\xrightarrow{w}0$, 且 $(T-\lambda I)x_n\to 0$.

由 (2) 证明 (3). 如果存在 $\varepsilon>0$, $\dim\mathcal{R}(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})<\infty$, 则投影算子 $E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon}$ 是紧的, 对于满足条件 (2) 的点列 $\{x_n\}$, 由于 $x_n\xrightarrow{w}0$, 由定理 1.6.19 推出 $(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})x_n\to 0$. 因此

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda_0 I)x_n\|^2&=\int|\lambda-\lambda_0|^2\,\mathrm{d}(\|E_t x_n\|^2)\\&\geqslant\varepsilon^2\left[\int\mathrm{d}(\|E_t x_n\|^2)-\int\chi_{(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)}\,\mathrm{d}(\|E_t x_n\|^2)\right]\\&=\varepsilon^2\left[||x_n||^2-\|(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})x_n\|^2\right]\to\varepsilon^2\neq 0.\end{aligned}$$

矛盾.

由 (3) 证明 (1). 如果 $\dim\mathcal{R}(E_\lambda-E_{\lambda-0})=\infty$, 则 λ 是 T 的一个无穷维的特征值, $\lambda\in\sigma_{\mathrm{e}}(T)$. 如果 $\mathcal{R}(E_\lambda-E_{\lambda-0})$ 是有限维的, 但是对于 $\forall\varepsilon>0$, $\mathcal{R}(E_{\lambda+\varepsilon}-E_{\lambda-\varepsilon})=\infty$, 那么对于 $\forall\varepsilon>0$, 在 $(\lambda-\varepsilon,\lambda)$ 和 $(\lambda,\lambda+\varepsilon)$ 中至少包含一个谱点, 因此 λ 是 $\sigma(T)$ 的聚点. □

我们把满足条件 (2) 的点列称为是 Weyl 列.

定义 4.5.3　点列 $\{x_n\}$ 称为线性算子 T 关于 λ 的 Weyl 列, 如果 $\{x_n\}\subset\mathfrak{D}(T)$, $\|x_n\|=1, x_n\xrightarrow{w}0$, 且 $(T-\lambda I)x_n\to 0\ (n\to\infty)$.

注　λ 是自共轭算子 T 的本质谱当且仅当存在 T 关于 λ 的 Weyl 列.

定理 4.5.4 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的自共轭算子, $a<b$, $\dim\mathcal{R}(E_{b-0}-E_a)=m<\infty$, 那么 $\sigma(T)\cap(a,b)$ 仅仅包含孤立的有限维特征值, 这些特征值的重数等于 m.

证明 由定理 4.5.2, $(a,b)\cap\sigma_{\rm e}(T)=\varnothing$, 即 $(a,b)\cap\sigma(T)\subset\sigma_{\rm d}(T)$. 令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 是 T 在 (a,b) 中的特征值, 它们的个数至多可数, 且无聚点, 于是

$$E_{b-0}-E_a\geqslant\sum_{j=1}^{n}(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_{j-1}}),\qquad\forall n\in\mathbb{N}.$$

因此仅仅只能有有限多个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 在 (a,b) 中, 且 $\dim\mathcal{R}(E_{b-0}-E_a)=\sum\limits_{n=1}^{k}\dim\mathcal{R}(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j-0})$, 即特征值的重数之和等于 m. □

定理 4.5.5 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的自共轭算子, 如果 $\dim\mathcal{R}(E_b)=m<\infty$, 其中 $b\in\mathbb{R}$, 那么 T 是有下界的.

证明 由定理 4.5.4 可推知, $(-\infty,b)$ 包含至多 m 个谱点, 最小的谱点是 T 的下界. □

定理 4.5.6 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的自共轭算子, 如果 $\dim\mathcal{R}(E_b-E_a)=\infty$, 则 $\sigma_{\rm e}(T)\cap[a,b]\neq\varnothing$.

证明 如果 $\sigma_{\rm e}(T)\cap[a,b]=\varnothing$, 对于 $\forall\lambda\in[a,b]$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\dim\mathcal{R}(E_{\lambda+\varepsilon}-E_{\lambda-\varepsilon})<\infty$, 闭区间能被有限这样的区间所覆盖, 即 $\dim\mathcal{R}(E_b-E_a)<\infty$, 矛盾. □

定理 4.5.7 设 T 是 Hilbert 空间中的一个闭的对称算子, T' 是 T 的 m 维扩张, 则

$$\dim(\mathcal{N}(T'-\lambda I)\ominus\mathcal{N}(T-\lambda I))\leqslant m.\tag{4.5.1}$$

进一步地, 如果 $\dim\mathcal{N}(T-\lambda I)<\infty$, 那么

$$\dim\mathcal{N}(T'-\lambda I)-\dim\mathcal{N}(T-\lambda I)\leqslant m.\tag{4.5.2}$$

证明 $\mathcal{N}(T-\lambda I)\subset\mathcal{N}(T'-\lambda I)$, 且由公式

$$(\mathcal{N}(T'-\lambda I)\ominus\mathcal{N}(T-\lambda I))\cap\mathfrak{D}(T)=\{0\}.$$

可以推出

$$(\mathcal{N}(T'-\lambda I)\ominus\mathcal{N}(T-\lambda I))\dotplus\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(T').$$

因此

$$\dim(\mathcal{N}(T'-\lambda I)\ominus\mathcal{N}(T-\lambda I))\leqslant\dim\mathfrak{D}(T')/\mathfrak{D}(T)=m.$$

如果 $\dim\mathcal{N}(T-\lambda I)<\infty$, 由上式可推出 (4.5.2). □

推论 4.5.8 具有有限亏指数 (m,m) 的闭对称算子扩张为自共轭算子时, 它的每一个特征值的重数的增加不超过 m, 特别是它的新的特征值的重数不大于 m.

定理 4.5.9 设 T 是 Hilbert 空间 H 中闭的对称算子, T 的亏指数 $d(T) = (m,m)$, 且存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得

$$((T-\lambda I)x, x) \geqslant c\,\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T), \tag{4.5.3}$$

其中 $c>0$, 那么 T 的所有自共轭扩张 T' 的谱集 $\sigma(T')$, 满足 $\sigma(T') \cap (\lambda - c, \lambda + c)$ 仅仅包含总重数不超过 m 的孤立的特征值.

注 c 称为 T 的一个下界, 满足条件 (4.5.3) 的算子 T 称为是下方有界的. 显然由条件 (4.5.3) 可导出 $\|(T-\lambda I)x\| \geqslant c\,\|x\|$.

证明 由定理 4.5.4, 只需证明 $\dim(\mathcal{R}(E_{\lambda+c-0} - E_{\lambda-c})) \leqslant m$, 其中 $\{E_\lambda\}$ 是 T' 的谱族. 假设不然, $\dim(\mathcal{R}(E_{\lambda+c-0} - E_{\lambda-c})) > m$. 由于

$$\dim \mathfrak{D}(T')/\mathfrak{D}(T) = m,$$

且

$$\mathcal{R}(E_{\lambda+c-0} - E_{\lambda-c}) \subset \mathfrak{D}(T'),$$

因此存在 $x \in \mathcal{R}(E_{\lambda+c-0} - E_{\lambda-c}) \cap \mathfrak{D}(T)$, $x \neq 0$, 使得

$$c\,\|x\| \leqslant \|(T-\lambda I)x\| = \left\{ \int_{|\lambda - t| < c} |\lambda - t|^2 \,\mathrm{d}(\|E_\lambda x\|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} < c\,\|x\|.$$

矛盾. □

推论 4.5.10 T 是 Hilbert 空间 H 上的闭的有下界 γ 的对称算子, $d(T) = (m, m)$, T' 是 T 的一个自共轭扩张, 则 $\sigma(T') \cap (-\infty, \gamma)$ 仅仅包含总重数不超过 m 的孤立的特征值.

证明 对于 $\lambda < \gamma$, $c = \gamma - \lambda$, $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, 有

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqslant ((T-\lambda I)x, x)\,\|x\|^{-1} \geqslant (\gamma - \lambda)\,\|x\|.$$

由定理 4.5.9 推知结论成立. □

注 由于常微分算子的亏指数都是有限的, 上述定理对于研究微分算子的谱是十分重要的.

推论 4.5.11 设 T 是 Hilbert 空间 H 上定义的有下界的对称微分算子, T_1 是 T 的自共轭扩张, 则 $\sigma(T_1) \cap (-\infty, \gamma)$ 中只包含有孤立的特征值, 并且其总重数之和不超过 m.

4.5.2 本质谱在紧摄动下的不变性

定理 4.5.12 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, A 是紧的自共轭算子, 则算子 $T+A$ 也是自共轭的, 其中 $\mathfrak{D}(T+A)=\mathfrak{D}(T)$ 且 $\sigma_{\mathrm{e}}(T+A)=\sigma_{\mathrm{e}}(T)$.

证明 $T+A$ 是自共轭的是显然的. 设 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{e}}(T)$, 则存在 Weyl 列 $\{x_n\}$. 由于 $x_n\xrightarrow{w}0$, 于是 $Ax_n\to 0\ (n\to\infty)$, 从而

$$(T+A-\lambda I)x_n=(T-\lambda I)x_n+Ax_n\to 0,$$

即 $\{x_n\}$ 也是 $T+A$ 关于 λ 的 Weyl 列, $\sigma_{\mathrm{e}}(T)\subset\sigma_{\mathrm{e}}(T+A)$, 反过来的等式由 $T=(T+A)+(-A)$ 可证. □

定理 4.5.13 T_1 和 T_2 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, 如果存在 $\lambda_0\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$ 且

$$A=(T_2-\lambda_0 I)^{-1}-(T_1-\lambda_0 I)^{-1}$$

是紧的线性算子, 则 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_1)=\sigma_{\mathrm{e}}(T_2)$.

证明 设 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{e}}(T_1)$, 并且 $\{x_n\}$ 是 T_1 关于 λ 的 Weyl 列, 令

$$y_n=(T_2-\lambda_0 I)^{-1}(T_1-\lambda_0 I)x_n,$$

即

$$y_n=A(T_1-\lambda_0 I)x_n+(T_1-\lambda_0 I)^{-1}(T_1-\lambda_0 I)x_n=A(T_1-\lambda_0 I)x_n+x_n,$$

注意到 $(T_1-\lambda I)x_n\to 0$, $x_n\xrightarrow{w}0$, A 是紧的, 则 $Ax_n\to 0$, 于是

$$y_n-x_n=A(T_1-\lambda I)x_n+(A(\lambda-\lambda_0)I)x_n\to 0.$$

由 $x_n\xrightarrow{w}0$, 推出 $y_n\xrightarrow{w}0$. 由于 $\|x_n\|=1$, 不失一般性, 可以假定 $\|y_n\|=1$ 且

$$\begin{aligned}&(T_2-\lambda I)y_n=(T_2-\lambda_0 I)y_n+(\lambda_0-\lambda)y_n\\=&(T_1-\lambda_0 I)x_n+(\lambda_0-\lambda)y_n=(T_1-\lambda)x_n+(\lambda_0-\lambda)(y_n-x_n)\to 0,\end{aligned}$$

即 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{e}}(T_2)$, 同样可以证明 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_2)\subset\sigma_{\mathrm{e}}(T_1)$. □

注 1 如果 $\lambda_0\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$, A 是紧的, 那么对于 $\forall\lambda\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$, A 都是紧的 (参阅 [9]).

注 2 在定理 4.5.13 中并没有要求 $\mathfrak{D}(T_2)=\mathfrak{D}(T_1)$.

注 3 注意到

$$\mathcal{R}_\lambda(T_2)-\mathcal{R}_\lambda(T_1)=\mathcal{R}_\lambda(T_2)(T_2-T_1)\mathcal{R}_\lambda(T_1).$$

由定理 4.5.13 可推出定理 4.5.12.

4.5.3 本质谱核

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的闭对称线性算子, 令 $H_\lambda = \mathcal{N}(T-\lambda I)^\perp$, 显然 T 把 $\mathcal{N}(T-\lambda I)$ 映到 $\mathcal{N}(T-\lambda I)$ 中, 且 $T(H_\lambda \cap \mathfrak{D}(T)) \subset H_\lambda$. 因此 H_λ 是 T 的一个约化子空间. 定义 $T_\lambda = T|_{H_\lambda}$, 即

$$\mathfrak{D}(T_\lambda) = H_\lambda \cap \mathfrak{D}(T), \tag{4.5.4}$$

$$T_\lambda x = Tx, \quad \forall x \in \mathfrak{D}(T_\lambda). \tag{4.5.5}$$

因此 $T_\lambda - \lambda$ 是一一的, 且 $\mathfrak{D}(T_\lambda)$ 在 H_λ 中是稠密的, T_λ 是闭的对称线性算子.

定义 4.5.14　令 T 是 Hilbert 空间 H 上的闭的对称线性算子,

$$W_{\mathrm{e}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \big| (T_\lambda - \lambda I)^{-1}\text{是无界的, 或者}\dim\mathcal{N}(T-\lambda I) = \infty\}, \tag{4.5.6}$$

称为 T 的本质谱核.

定理 4.5.15　设 T 是 Hilbert 空间 H 上的闭的对称算子, 则

(1) $W_{\mathrm{e}}(T) \subset \overline{W(T)} \subset \mathbb{R}$, 且 $W_{\mathrm{e}}(T) \subset \sigma(T)$;

(2) 设 T' 是 T 的一个闭的对称扩张, 则 $W(T) \subset W(T')$ 且 $W_{\mathrm{e}}(T) \subset W_{\mathrm{e}}(T')$;

(3) 如果 T' 是 T 的有限维对称扩张, 则 $W_{\mathrm{e}}(T) = W_{\mathrm{e}}(T')$;

(4) 如果 T 是自共轭的, 则 $W_{\mathrm{e}}(T) = \sigma_{\mathrm{e}}(T)$.

证明　(1) 如果 $\lambda \in W_{\mathrm{e}}(T)$, 则 $\dim\mathcal{N}(T-\lambda I) = \infty$, 或者是 $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 无界的, 则 $\lambda \notin \Pi(T)$, 于是由定义 4.2.9 的注 3, $\lambda \in \overline{W(T)}$, 由于 T 是对称的, 显然 $\overline{W(T)} \subset \mathbb{R}$. 如果 $\lambda \in W_{\mathrm{e}}(T)$, $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 是不连续的, 或者 $\exists x \neq 0$, 使得 $(T-\lambda)x = 0$, 即 $W_{\mathrm{e}}(T) \subset \sigma(T)$.

(2) 从 $W(T)$ 的定义显然有 $W(T) \subset W(T')$. 只需证明 $W_{\mathrm{e}}(T) \subset W_{\mathrm{e}}(T')$. 设 $\lambda \in W_{\mathrm{e}}(T)$, 如果 $\dim\mathcal{N}(T'-\lambda I) = \infty$, 则 $\lambda \in W_{\mathrm{e}}(T')$. 因此不妨假设 $\dim\mathcal{N}(T-\lambda I) \leqslant \dim\mathcal{N}(T'-\lambda I) < \infty$, 由 $W_{\mathrm{e}}(T)$ 的定义, $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 是无界的, 于是存在 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(T_\lambda)$, $\|x_n\| = 1$ 且 $(T_\lambda - \lambda I)x_n \to 0$.

下面证明 $\{x_n\}$ 中无收敛的子列, 假如不然, 如果 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$, 于是 $\|x\| = 1$ 且 $T_\lambda x_{n_k} \to \lambda x$. 由于 T_λ 是闭的, 则 $x \in \mathfrak{D}(T_\lambda)$ 且 $T_\lambda x = \lambda x$ 与 $T_\lambda - \lambda I$ 是一一的矛盾.

设 P 为有限维空间 $\mathcal{N}(T'-\lambda I)$ 上的正交投影算子, 令 $y_n = (I-P)x_n$. 因为 P 是紧的, 存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $y \in H$, 使得 $Px_{n_k} \to y$. 由于 $\{x_n\}$ 中无收敛的子列, 于是 $y_{n_k} = (I-P)x_{n_k}$ 是不收敛的, 且

$$\begin{aligned}(T'_\lambda - \lambda I)y_{n_k} &= (T'-\lambda I)x_{n_k} - (T'-\lambda)Px_{n_k} \\ &= (T'-\lambda I)x_{n_k} = (T-\lambda I)x_{n_k} \to 0,\end{aligned}$$

推知 $(T'_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 是无界的, $\lambda \in W_e(T')$.

(3) 由 (2) 知, 只需证明 $W_e(T') \subset W_e(T)$. 以下证明 $\lambda \notin W_e(T)$ 可以推出 $\lambda \notin W_e(T')$. 由于 $\lambda \notin W_e(T)$, 由定义 $\dim \mathcal{N}(T-\lambda I) < \infty$, 由定理 4.5.7 知

$$\dim \mathcal{N}(T'-\lambda I) \leqslant \dim \mathcal{N}(T-\lambda I) + m < \infty,$$

又因为 $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 是连续的, 闭的线性算子, 因此 $\mathcal{R}(T-\lambda I) = \mathcal{R}(T_\lambda - \lambda I) = \mathfrak{D}((T_\lambda - \lambda I)^{-1})$ 是闭的, 由于 T' 是 T 的有限维扩张, 因此, $\mathfrak{D}((T'_\lambda - \lambda I)^{-1}) = \mathcal{R}(T'_\lambda - \lambda I) = \mathcal{R}(T' - \lambda I)$ 也是闭的, 由闭算子定理知 $(T'_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 是连续的, 即 $\lambda \in W_e(T')$.

(4) 设 $\lambda \in W_e(T)$, 如果 $\dim \mathcal{N}(T-\lambda I) = \infty$, $\lambda \in \sigma_e(T)$. 如果 $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 不连续, 我们将证明 λ 是 $\sigma(T)$ 的聚点, 假如不然, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ 且对于 $\forall x \in \mathcal{N}(T-\lambda I)^\perp \cap \mathfrak{D}(T) = (\mathcal{R}(E_\lambda))^\perp \cap \mathfrak{D}(T)$,

$$\|(T_\lambda - \lambda I)x\|^2 = \|(T-\lambda)x\|^2 = \int_{|t-\lambda| \geqslant \varepsilon} |\lambda - t|^2 \, \mathrm{d}(\|E_t x\|^2) \geqslant \varepsilon \|x\|^2$$

与 $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 不连续矛盾, 即 $\lambda \in \sigma_e(T)$.

反之, 设 $\lambda \in \sigma_e(T)$, 如果 λ 是 T 的一个无穷维特征值, $\lambda \in W_e(T)$. 如果 λ 是 $\sigma(T)$ 的聚点, 则存在 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, $x_n \in \mathcal{R}(E_{\lambda+\frac{1}{n}} - E_\lambda + E_{\lambda-0} - E_{\lambda-\frac{1}{n}})$. 有

$$x_n \in \mathcal{R}(E_\lambda)^\perp \cap \mathfrak{D}(T) = H_\lambda \cap \mathfrak{D}(T) \text{ 且 } (T_\lambda - \lambda I)x_n = (T-\lambda I)x_n \to 0,$$

因此 $(T_\lambda - \lambda I)^{-1}$ 是不连续的, $\lambda \in W_e(T)$. □

由此可以得到自共轭算子的十分重要的性质

定理 4.5.16 设 T 是 Hilbert 空间 H 中闭的对称算子, 具有相等的有限亏指数, 那么 T 的所有自共轭扩张均有相同的本质谱.

证明 可由定理 4.5.15 的结论 (3) 和 (4) 直接推出. □

注 如果上述 T 的某一个自共轭扩张的谱是离散的, 则 T 的所有自共轭扩张的谱都是离散的, 即谱的离散性与 T 的自共轭扩张的选择无关.

习 题 4.5

1. 设 T 是无穷维 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子.

(1) 若 T 是有界的, 则 $\sigma_e(T) \neq \varnothing$ (结合定理 4.5.15 的结论 (4) 证明);

(2) T 是紧的当且仅当 T 是有界的且 $\sigma_e(T) = \{0\}$.

2. 设自共轭算子 T 具有谱族 E, 并假设 M 是 $\mathfrak{D}(T)$ 的子空间, 且使得 $\|(\lambda I - T)x\| \leqslant c\|x\|$ $(\forall x \in M)$ 成立. 则

(1) $\dim \mathcal{R}(E(\lambda + c) - E(\lambda - c-)) \geqslant \dim M$;

(2) 若 $\dim M=\infty$, 则 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)\cap[\lambda-c,\lambda+c]\neq\varnothing$.

3. 设 T 是具有相等有限亏指数 (m,m) 的闭对称算子, 并令 T_1,T_2 是 T 的自共轭扩张, 且分别具有谱族 E_1,E_2, 则

$$\dim\mathcal{R}(E_2(b-)-E_2(a))\leqslant m+\dim\mathcal{R}(E_1(b-)-E_1(a)).$$

(提示: 利用第 2 题.)

4. 设 T 是 H 上的自共轭算子, T 有纯点谱当且仅当对 $\forall\lambda\in\rho(T),(\lambda I-T)^{-1}$ 是紧的. 若 H 是不可分的, 则 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)\neq\varnothing$.

5. 设 T_1,T_2 是正常算子, 若对某个 $z\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$, 有

$$\sigma_{\mathrm{e}}((z-T_1)^{-1})=\sigma_{\mathrm{e}}((z-T_2)^{-1}),$$

则 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_1)=\sigma_{\mathrm{e}}(T_2)$.

6. 设 T_1,T_2 是对称算子, 且 $\mathfrak{D}(T_1)\supset\mathfrak{D}(T_2)$.

(1) 若 T_1 具有纯点谱, 则 T_2 具有纯点谱;

(2) 设 $\{\lambda_j^{(1)}\},\{\lambda_j^{(2)}\}$ 分别是 T_1 和 T_2 的特征值 (特征值按重数计数), 则对适当的数 $a>0$, $b\geqslant 0$, 有 $|\lambda_j^{(2)}|\geqslant a|\lambda_j^{(1)}|+b\,(\forall j)$ 成立.

(提示: 利用等式 $(\mathrm{i}-T_2)^{-1}=(\mathrm{i}-T_2)^{-1}(\mathrm{i}-T_1)(\mathrm{i}-T_1)^{-1}$ 及 $(\mathrm{i}-T_2)^{-1}(\mathrm{i}-T_1)$ 的有界性和 (2.6.17).)

7. 设 T 是自共轭算子且使得 $(a,b)\cap\sigma(T)=\varnothing$ 或 $(a,b)\cap\sigma_{\mathrm{e}}(T)=\varnothing$. 若 $V\geqslant 0$ 是对称的, $\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(V)$, $T+V$ 是自共轭的, 并且对于某个 $\eta<b-a$, 有 $(x,Vx)\leqslant-(x,Tx)+(a+\eta)\|x\|^2$ $(\forall x\in E(a)\mathfrak{D}(T))$ 成立, 这里 E 为 T 的谱族, 则 $(a+\eta,b)\cap\sigma(T+V)=\varnothing$ 或 $(a+\eta,b)\cap\sigma_{\mathrm{e}}(T+V)=\varnothing$ 分别成立.

8. 计算算子 $T\in\mathfrak{B}(l^2)$ 的谱, 其中 T 定义为

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots)=(-x_2,x_1,-x_4,x_3,\cdots).$$

第五章　线性常微分算子

§5.1　一阶微分算子和它的共轭算子

一阶微分算子是 Hilbert 空间上定义的最简单的无界线性算子, 我们分别考虑定义在有限区间上、$[0,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$ 上的一阶微分算子, 从中具体分析谱理论的一些基本概念. 我们可以看到在这三种情况下, 它们谱的分布是完全不同的.

5.1.1　有限区间上定义的一阶微分算子

定义 5.1.1　设 Hilbert 空间 $H=L^2[-1,1]$, 线性微分算子 T_0 定义为

$$(T_0x)(t)=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\quad \mathfrak{D}(T_0)=C_0^\infty(-1,1), \tag{5.1.1}$$

其中 $C_0^\infty(-1,1)$ 表示在 $(-1,1)$ 中全体具有紧支柱的无穷次可微的函数.

注 1　显然 $\mathfrak{D}(T_0)$ 是稠密的.

注 2　对 $\forall x,y\in\mathfrak{D}(T_0)$, 有

$$(T_0x,y)=-\int_{-1}^{1}\mathrm{i}x'(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t=-\int_{-1}^{1}x(t)\overline{\mathrm{i}y'(t)}\,\mathrm{d}t=(x,T_0y).$$

于是 T_0 是对称的, 因而是可闭的, 记 $\overline{T_0}=T$.

定理 5.1.2　T_0,T 如上定义, 则 $\mathfrak{D}(T^*)$ 等于在 $[-1,1]$ 中绝对连续的, 且它们的导数属于 $L^2[-1,1]$ 的全体函数, 即

$$\mathfrak{D}(T^*)=\{x\in H\big|x\text{ 在 }[-1,1]\text{ 上绝对连续且 }x'(t)\in L^2[-1,1]\}. \tag{5.1.2}$$

证明　由 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$, 根据共轭算子的定义, 存在 $y^*\in L^2$, 对于 $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, 有

$$-\int_{-1}^{1}\mathrm{i}x'(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}x(t)\overline{y^*(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{5.1.3}$$

且 $y^*=T^*y$. 由 (5.1.3) 可知, 在广义导数的意义下, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}y^*$, 即

$$y^*=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{5.1.4}$$

几乎处处成立, 这要求 y 绝对连续且 $y'(t)\in L^2[-1,1]$. 反之, 若 y 绝对连续, $y'\in L^2[-1,1]$ 可推知 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$. □

由于 $T_0\subset T_0^*=T^*$, T^* 是稠定的, 根据定理 3.2.4, $T=T_0^{**}$.

定理 5.1.3　T_0, T 和 T^* 如上定义, 则

$$\mathfrak{D}(T) = \{x \in \mathfrak{D}(T^*) | x(-1) = x(1) = 0\}. \tag{5.1.5}$$

证明　对于任何的 $x, y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}(T^*y, x) &= -\int_{-1}^{1} \mathrm{i}y'(t)\overline{x(t)}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}y(t)\overline{x(t)}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} y(t)\overline{\mathrm{i}x'(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{i}y(t)\overline{x(t)}\Big|_{-1}^{1} + (y, T^*x).\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

如果 (5.1.5) 满足, 则 $(T^*y, x) = (y, T^*x)$, 即 $y \in \mathfrak{D}(T^{**}) = \mathfrak{D}(T)$. 反之, 若 $x \in \mathfrak{D}(T^{**})$, 由 (5.1.6), 知

$$y(1)\overline{x(1)} - y(-1)\overline{x(-1)} = 0.$$

特别地, 令 $y = 1 \pm t$, 则可知

$$x(1) = x(-1) = 0.$$

□

注　T_0 的闭包 T 的定义域有所扩大, 降低了对光滑性的要求, 但保持边界条件不变.

定理 5.1.4　T 如上定义, 则 T 的正、负亏指数相等, 即

$$n_+(T) = n_-(T) = 1. \tag{5.1.7}$$

证明　因为 $n_\pm(T) = \dim \mathcal{N}(T^* \mp \mathrm{i}I)$, 由 $-\mathrm{i}y' \mp \mathrm{i}y = 0$, $y \in \mathfrak{D}(T^*)$, 有

$$\mathcal{N}(T^* - \mathrm{i}I) = \{\alpha_1 \mathrm{e}^{-t}\}, \tag{5.1.8}$$

$$\mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I) = \{\alpha_2 \mathrm{e}^{t}\}. \tag{5.1.9}$$

因此 $n_-(T) = n_+(T) = 1$.

□

由于上下亏指数相等 (不等于零), T 有对称扩张和自共轭扩张, 设 $\widetilde{T}$ 是 T 的自共轭扩张, 则

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(\widetilde{T}) \subset \mathfrak{D}(T^*), \\ &T \subset \widetilde{T} \subset T^*,\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

且

$$\begin{aligned}&\dim \mathfrak{D}(\widetilde{T})/\mathfrak{D}(T) = 1, \\ &\dim \mathfrak{D}(T^*)/\mathfrak{D}(\widetilde{T}) = 1.\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

$\widetilde{T}$ 是 T^* 在 $\mathfrak{D}(\widetilde{T})$ 上的限制, 且 $\widetilde{T}$ 是闭的. 令 $g \in \mathfrak{D}(\widetilde{T})$, $g \notin \mathfrak{D}(T)$, 由 (5.1.11) 知

$$\mathfrak{D}(\widetilde{T}) = \mathfrak{D}(T) + \{\alpha g\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{5.1.12}$$

其中 $\mathfrak{D}(\widetilde{T})$ 满足 (5.1.10). 反之, $\mathfrak{D}(\widetilde{T})$ 满足 (5.1.10). 对于适当选取的 g 应有 (5.1.12) 的表示形式. 下面用边界条件来确定 $\mathfrak{D}(\widetilde{T})$. 令 g 是在 (5.1.12) 中的函数, 它不全满足 (5.1.5) 中的两个边界条件. 令 θ 是一个复数, 使得 $g(1) = \theta g(-1)$, 其中如果 $g(-1) = 0$, $\theta = \infty$, 或者说 $\dfrac{1}{\theta} = 0$, 于是对于 $y \in \mathfrak{D}(\widetilde{T})$,

$$y(1) = \theta y(-1). \tag{5.1.13}$$

另外, 对于每一个 $\theta \in \mathbb{C}$, (5.1.13) 定义了一个 $\mathfrak{D}(\widetilde{T}_\theta) \supset \mathfrak{D}(T)$, 即 θ 不同, 对应的 $\mathfrak{D}(\widetilde{T}_\theta)$ 不同, 记在其上定义的算子为 $\widetilde{T}_\theta$, 也就是说, $\widetilde{T}_\theta$ 是全体满足 (5.1.10) 的 T 的扩张, $\widetilde{T}_\theta$ 定义域为 $\mathfrak{D}(\widetilde{T}_\theta)$, 其中的元素满足边界条件 (5.1.13) 且 $\widetilde{T}_\theta$ 是闭的 (闭算子的有限维扩张). 特别地, 当 $\theta = 0$ 或 $\theta = \infty$ 时, 对应着 Cauchy 条件, $y(1) = 0$ 或者 $y(-1) = 0$. 对于 $\widetilde{T}_\theta$ 的共轭算子 $(\widetilde{T}_\theta)^*$ (记为 $\widetilde{T}_\theta^*$), 有

$$T \subset \widetilde{T}_\theta^* \subset T^*, \tag{5.1.14}$$

即 $\widetilde{T}_\theta^*$ 与某一个 $\widetilde{T}_\theta$ 相同. 可以证明 $\widetilde{T}_\theta^* = \widetilde{T}_{\theta_1}$, 其中 $\theta_1 \bar{\theta} = 1$. 事实上, 对于任意的 $y \in \widetilde{T}_\theta$ 和 $x \in \widetilde{T}_{\theta_1}$, 由 (5.1.13) 和 (5.1.6), 当 $\theta_1 \bar{\theta} = 1$ 时有

$$(\widetilde{T}_\theta y, x) = (y, \widetilde{T}_{\theta_1} x), \tag{5.1.15}$$

即 $\widetilde{T}_\theta^* = \widetilde{T}_{\theta_1}$. 同样可以有 $\widetilde{T}_0^* = \widetilde{T}_\infty$, $\widetilde{T}_\infty^* = \widetilde{T}_0$. 因此, 我们有

定理 5.1.5 $T, \widetilde{T}_\theta$ 如上定义, $\widetilde{T}$ 是 T 的自共轭扩张, 当且仅当 $\widetilde{T}$ 应有 $\widetilde{T}_\theta$ 的形式, 且 $|\theta| = 1$, 即 $\theta\bar{\theta} = 1$.

下面我们考虑 $\widetilde{T}_\theta$ 的谱.

$$\begin{aligned} &\widetilde{T}_\theta\colon\ \widetilde{T}_\theta x = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ &\mathfrak{D}(\widetilde{T}_\theta) = \{x \in \mathfrak{D}(T^*) | x(1) = \theta x(-1)\}, \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

对于 $\forall y \in L^2[-1,1]$,

$$(\widetilde{T}_\theta - \lambda I)x = y,$$

即 $-\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - \lambda x(t) = y(t)$. 可以把上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} x(t))}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} y(t). \tag{5.1.17}$$

于是

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}x(-1)+\mathrm{i}\int_{-1}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\tau}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.1.18}$$

设 $\theta\neq\infty$, 令 $t=1$, 假设 $\theta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda}\neq 1$, 注意到 $x(1)=\theta x(-1)$, 可得

$$x(t)=\frac{-\mathrm{i}}{1-\theta\mathrm{e}^{-2\lambda\mathrm{i}}}\int_{-1}^{1}y(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}\int_{-1}^{t}y(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{5.1.19}$$

即

$$x(t)=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\displaystyle\int_{t}^{1}y(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}\int_{-1}^{t}y(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau}{\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}}. \tag{5.1.20}$$

因此, 在 $\theta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda}\neq 1$ 时, ($\widetilde{T}_\theta-\lambda I$) 的逆算子存在, 定义在全空间 $H=L^2[-1,1]$ 上且是紧的. 对于 $\theta=\infty$, 即 $x(-1)=0$. 由 (5.1.18), 对于 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 有

$$x(t)=\mathrm{i}\int_{-1}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.1.21}$$

当 $\theta=0$, 由 (5.1.20), 对于 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 有

$$x(t)=-\mathrm{i}\int_{t}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.1.22}$$

注　对于算子 $\widetilde{T}_\infty$ ($\widetilde{T}_0$), $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 都有 $\lambda\in\rho(\widetilde{T}_\infty)$ ($\lambda\in\rho(\widetilde{T}_0)$), 即它们的谱集合是空集, 而无界的自共轭算子的谱集是非空的 (参阅定理 4.2.26).

当 $\theta\neq 0$, 令 $\theta=\mathrm{e}^{-2(\delta-\mathrm{i}r)}$, 其中 δ, r 是实的, $-\pi\leqslant 2r<\pi$, 解方程

$$\theta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\lambda}=1, \tag{5.1.23}$$

得到

$$\lambda_n(\theta)=r+\mathrm{i}\delta+n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{5.1.24}$$

当 $\lambda=\lambda_n(\theta), \theta\neq 0, \theta\neq\infty$ 时, $(\widetilde{T}_\theta-\lambda I)x=0$ 有非零解 $x_n(t)=\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n t}$, $x_n(t)\in L^2[-1,1]$, 即 λ_n 是 $\widetilde{T}_\theta$ 的特征值, $\lambda_n\in\sigma_{\mathrm{p}}(\widetilde{T}_\theta)$.

对于 T 的自共轭扩张, $|\theta|=1$, 于是 $\delta=0$, λ_n 是实的, 且特征函数形成了一个完备的正交系.

当 $|\theta|\neq 1$, 令 $\theta_1=\bar{\theta}^{-1}$, 则 $\widetilde{T}_\theta$ 和 $\widetilde{T}_{\theta_1}$ 是互为共轭算子, 且

$$\lambda_n(\theta_1)=\overline{\lambda_n(\theta)}, \tag{5.1.25}$$

它们的特征函数系组成了一个双正交系, 即

$$(x_{n,\theta}, x_{m,\theta_1})=0,\quad m\neq n. \tag{5.1.26}$$

进一步地, 如果 y 正交于 x_{n,θ_1}, 即 $(y, x_{n,\theta_1}) = 0$, 则 $(\widetilde{T}_\theta - \lambda_n(\theta)I)x = y$ 有解. 事实上, 把 $\lambda = \lambda_n(\theta)$ 代入 (5.1.18), 注意到 $(y, x_{n,\theta_1}) = 0$, 有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n(\theta)}x(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n(\theta)}x(-1).$$

边界条件 (5.1.13) 满足, 且 $x(-1)$ 可以取任意值, 即 $x(t)$ 可以解得

$$x(t) = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n(\theta)t} + \mathrm{i}\int_{-1}^{t} y(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n(\theta)(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \quad \forall\alpha \in \mathbb{C}, \tag{5.1.27}$$

即 $\mathcal{R}(\widetilde{T}_\theta - \lambda I) = \mathcal{N}(\widetilde{T}_{\theta_1} - \lambda_n(\theta_1)I)^\perp$, $\mathcal{R}(\widetilde{T}_\theta - \lambda I)$ 是闭的, 于是 $\sigma_{\mathrm{c}}(\widetilde{T}_\theta) = \varnothing$. 综合上述讨论可以得到

定理 5.1.6 设 $\widetilde{T}_\theta$ 是由 (5.1.16) 定义的 T 的扩张, 则

(1) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{r}}(T) = \mathbb{C}$; (5.1.28)

(2) $\theta = 0$ 或 $\theta = \infty$ 时, $\sigma(\widetilde{T}) = \varnothing$;

(3) $\theta \neq 0, \theta \neq \infty$ 时,

$$\sigma(\widetilde{T}_\theta) = \sigma_{\mathrm{p}}(\widetilde{T}_\theta) = \{\lambda_n(\theta)\}, \tag{5.1.29}$$

其中 $\lambda_n(\theta) = r + \mathrm{i}\delta + n\pi(n \in \mathbb{Z})$, $\theta = \mathrm{e}^{-2(\delta - \mathrm{i}r)}$, δ, r 是实的, $-\pi \leqslant 2r < \pi$;

(4) 当 $|\theta| = 1$, $\sigma(\widetilde{T}_\theta)$ 是实的, 即 $\delta = 0$;

(5) 当 $|\theta| \neq 1$, 则 $\lambda_n(\theta_1) = \overline{\lambda_n(\theta)}$, 其中 $\theta_1 = \bar{\theta}^{-1}$, 且其相应的特征值函数系满足

$$(x_{n,\theta}, x_{m,\theta_1}) = 0, \quad m \neq n.$$

5.1.2 无穷区间上定义的一阶微分算子

对于定义在 $[0, +\infty)$ 上的一阶微分算子情况则不同.

引理 5.1.7 设 $y \in L^2[0, +\infty)$, y 在 $[0, +\infty)$ 的任何紧子集上绝对连续且 $y' \in L^2[0, +\infty)$, 则

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0. \tag{5.1.30}$$

证明 由于

$$|y(t)|^2 = |y(0)|^2 + \int_0^t [y'(\tau)\overline{y(\tau)} + y(\tau)\overline{y'(\tau)}]\,\mathrm{d}\tau,$$

令 $t \to +\infty$, 由于 $y(t), y'(t)$ 属于 $L^2[0, +\infty)$, 于是当 $t \to +\infty$ 时, $|y(t)|^2$ 收敛, 结合 $y(t) \in L^2[0, +\infty)$, 推知 $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$. □

在 $L^2[0, +\infty)$ 上定义一阶微分算子 T_0 :

$$(T_0 x)(t) = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \mathfrak{D}(T_0) = C_0^\infty(0, +\infty). \tag{5.1.31}$$

T_0 是稠定的线性算子, 类似于在有限区间上的情况, 可以定义 T_0^*, 以及 T_0^{**}, 令 $T = T_0^{**}$, $T = \overline{T}_0$, 且

$$\mathfrak{D}(T^*) = \{x \in L^2[0,+\infty) \,|x(t)\text{在 } [0,+\infty)\text{的任何紧子集上绝对连续},$$
$$\text{且 } x' \in L^2[0,+\infty)\}, \tag{5.1.32}$$

$$(T^*x)(t) = -\mathrm{i}x'(t). \tag{5.1.33}$$

由分部积分及引理 5.1.7,

$$(T^*x,y) = -\mathrm{i}\int_0^\infty x'(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}x(0)\overline{y(0)} - \int_0^\infty x(t)\overline{\mathrm{i}y'(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}x(0)\overline{y(0)} + (x,T^*y). \tag{5.1.34}$$

我们有

定理 5.1.8　T_0, T 如上定义, 则 $x \in \mathfrak{D}(T^{**}) = \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(\overline{T}_0)$ 当且仅当 $x \in \mathfrak{D}(T^*)$ 且 $x(0) = 0$.

关于 T 的亏指数, 有

定理 5.1.9　$n_-(T) = 1$, $n_+(T) = 0$.

证明　由 (5.1.8) 和 (5.1.9) 知, 在有限区间,

$$\mathcal{N}(T^* - \mathrm{i}I) = \left\{\alpha_1 \mathrm{e}^{-t}\right\}, \quad \mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I) = \left\{\alpha_2 \mathrm{e}^{t}\right\}.$$

由于 $\mathrm{e}^t \notin L^2[0,+\infty)$, 因此 $\alpha_2 = 0$, 即

$$\mathcal{N}(T^* + \mathrm{i}I) = \{0\}.$$

注　T 是一个最大的对称算子, 但 T 不是自共轭的. 由 $\dim \mathfrak{D}(T^*)/\mathfrak{D}(T) = 1$, 则不存在 T 的扩张 $\widetilde{T}$, 使其满足 (5.1.10) 和 (5.1.11).

类似于例 4.1.2 知

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \varnothing, \quad \sigma_{\mathrm{c}}(T) = \{\lambda \,|\mathrm{Im}\lambda = 0\},$$

$$\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \{\lambda \,|\mathrm{Im}\lambda < 0\}, \quad \rho(T) = \{\lambda \,|\mathrm{Im}\lambda > 0\}.$$

同样可以在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上定义一阶微分算子:

$$(T_0x)(t) = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \mathfrak{D}(T_0) = C_0^\infty(-\infty,\infty).$$

T_0 是稠定的, 且由于 $\forall x,y \in \mathfrak{D}(T_0)$,

$$(T_0x,y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}x'(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{\mathrm{i}y'(t)}\,\mathrm{d}t = (x,T_0y),$$

则 T_0 是对称的, 令 $T=\overline{T}_0$, 同样可以定义 T^*, 且 $T=T_0^{**}=T^{**}$.

$$\mathfrak{D}(T^*)=\Big\{x\in L^2(-\infty,\infty)\Big|x\text{在 }(\infty,+\infty)\text{ 的任何紧子集上绝对连续,}\\ \text{且 }x'\in L^2(-\infty,\infty)\Big\}.$$

类似于引理 5.1.7, 有

$$\lim_{t\to\pm\infty}x(t)=0,\quad x\in\mathfrak{D}(T^*),$$

因此, 对于任何的 $x,y\in\mathfrak{D}(T^*)$,

$$(T^*x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}x'(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{\mathrm{i}y'(t)}\mathrm{d}t=(x,T^*y),$$

即 T^* 是对称的, 由

$$T^*\subset T^{**}=T\subset T^*,$$

知 T^* 是自共轭的 (T_0 是本质自共轭的),

$$T=T^*,\text{且}\,n_-(T)=n_+(T)=0.$$

事实上, 也可以由 $\mathrm{e}^{\pm t}\notin L^2(-\infty,\infty)$ 得到上述结果.

类似于例 4.1.1 有

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T)=\varnothing,\quad\sigma(T)=\sigma_{\mathrm{c}}(T)=\{\lambda\,|\mathrm{Im}\lambda=0\},$$

$$\rho(T)=\{\lambda\,|\mathrm{Im}\lambda\neq0\}.$$

对于 $\lambda\notin\mathbb{R}$, 及 $\forall y\in L^2(-\infty,\infty)$, 方程 $(T-\lambda I)x=y$ 有解:

$$x(t)=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad\mathrm{Im}\lambda>0,$$

$$x(t)=-\mathrm{i}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t-\tau)}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad\mathrm{Im}\lambda<0.$$

预解式是连续的, 但不是紧的.

§5.2 Sturm-Liouville 算子

5.2.1 Sturm-Liouville 算子和它的预解算子

对于二阶微分算子, 我们着重研究 Sturm-Liouville (S-L) 算子. 它是一类十分重要的对称微分算子, 在经典物理学和近代量子物理学中均有重要的应用背景. 对

于在 $L^2[a,b]$ 上定义的二阶微分算子, 与一阶微分算子相似, 我们可以先在 $C_0^\infty(a,b)$ 上定义 T_0, 然后再考虑其闭包 T, 之后得到其亏指数和对称自共轭扩张. 但在这一节里, 我们直接定义一个本质自共轭的二阶线性微分算子, 即 S-L 算子.

定义 5.2.1 设 Hilbert 空间 $H=L^2[a,b], p(t), p'(t), q(t)$ 是在 $[a,b]$ 上定义的实值连续函数, $p(t)>0$, $t\in[a,b]$. 令

$$C^2[a,b]=\{y(t)|y(t)\text{ 是 }[a,b]\text{ 上二次连续可微的函数}\}\subset H.$$

定义

$$Ly=-(py')'+qy,\quad y\in\mathfrak{D}(L),\tag{5.2.1}$$

$$\mathfrak{D}(L)=\left\{y\in C^2[a,b]\big|B_1(y)=B_2(y)=0\right\},\tag{5.2.2}$$

其中

$$B_1(y)=\alpha_1y(a)+\beta_1y'(a),\tag{5.2.3}$$

$$B_2(y)=\alpha_2y(b)+\beta_2y'(b)\tag{5.2.4}$$

是分离的边界条件, $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 是实的, 且

$$|\alpha_1|+|\beta_1|>0,\quad |\alpha_2|+|\beta_2|>0.\tag{5.2.5}$$

称 L 为 Sturm-Liouville 算子.

显然, L 是 $L^2[a,b]$ 中稠定的线性算子.

定理 5.2.2 设 L 是如上定义的 Sturm-Liouville 算子, 则 L 是对称算子.

证明 对于 $\forall x,y\in\mathfrak{D}(L)$,

$$\begin{aligned}(Lx,y)-(x,Ly)&=\int_a^b[-(px'(t))'\overline{y(t)}+x(t)\overline{y(t)}+(p\overline{y'(t)})'x(t)-qx(t)\overline{y(t)}]\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b[-(px')'\bar{y}+(p\bar{y}')'x]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由分部积分得到

$$(Lx,y)-(x,Ly)=p(b)[x(b)\overline{y'(b)}-x'(b)\overline{y(b)}]-p(a)[x(a)\overline{y'(a)}-x'(a)\overline{y(a)}].\tag{5.2.6}$$

由于 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2)$ 是实的, 所以 $\bar{x},\bar{y}$ 也属于 $\mathfrak{D}(L)$, 由 $x,\bar{y}\in\mathfrak{D}(L)$, 即满足边界条件 (5.2.3), 有

$$\begin{aligned}&\alpha_1x(a)+\beta_1x'(a)=0,\\&\alpha_1\overline{y(a)}+\beta_1\overline{y'(a)}=0.\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

由于 α_1, β_1 不全为零, 则

$$x(a)\overline{y'(a)} - x'(a)\overline{y(a)} = 0. \tag{5.2.8}$$

同理可推出

$$x(b)\overline{y'(b)} - x'(b)\overline{y(b)} = 0. \tag{5.2.9}$$

把 (5.2.8), (5.2.9) 代入 (5.2.6), 有

$$(Lx, y) = (x, Ly), \quad \forall x, y \in \mathfrak{D}(L),$$

即 L 是对称的. □

定理 5.2.3 设 L 是如上定义的 Sturm-Liouville 算子, 则 λ 是 L 的特征值, 当且仅当

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} B_1u_1 & B_1u_2 \\ B_2u_1 & B_2u_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.2.10}$$

其中 $u_1 = u_1(x, \lambda)$, $u_2 = u_2(x, \lambda)$ 是 $Ly = \lambda y$ 的两个线性无关解.

证明 由于方程 $Ly = \lambda y$ 的任何非平凡解能被写成 $u = c_1u_1 + c_2u_2$, c_1, c_2 不同时为零, 则 u 要满足边界条件 (5.2.3) 和 (5.2.4), 即

$$\begin{aligned} B_1u = c_1Bu_1 + c_2Bu_2 = 0, \\ B_2u = c_2Bu_1 + c_2Bu_2 = 0, \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

当且仅当其关于 c_1, c_2 的系数行列式 $\Delta(\lambda) = 0$. □

如果 0 不是 L 的特征值, 逆算子存在, 且可以表示为核函数为 Green 函数的积分算子.

定理 5.2.4 设 L 是如上定义的 Sturm-Liouville 算子, 假设 0 不是 L 的特征值, 则存在定义在 $[a, b] \times [a, b]$ 上的连续函数 $g(t, s)$, 使得

$$(L^{-1}y)(t) = \int_a^b g(t, s)y(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall y \in \mathcal{R}(L), \tag{5.2.12}$$

并且 $g(t, s)$ 能够被选择为是实值的, 且 $g(t, s) = g(s, t)$.

证明 $u_i(t)(i = 1, 2)$ 是方程 $-(py')' + qy = 0$ 满足边界条件 $B_iu_i = 0(i = 1, 2)$ 的非平凡解. 由定理 5.2.3 知, $u_i(i = 1, 2)$ 是线性无关的且 $B_iu_j \neq 0(i \neq j)$. 令

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \tag{5.2.13}$$

是它们的朗斯基行列式 (Wronskian), 则方程 $Lx = y$ 的解 $u(t)$ 可以写成

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + z(t),$$

其中

$$z(t)=\int_a^t \frac{u_1(t)u_2(s)-u_2(t)u_1(s)}{p(a)W(a)}y(s)\,\mathrm{d}s.$$

我们通过选择系数 c_1 和 c_2, 使得当 $y(t)$ 连续时, $u(t)\in\mathfrak{D}(L)$, 即满足边界条件 (5.2.2). 事实上, 我们可令 $c_2=0$ 且

$$c_1=-\int_a^b \frac{u_2(s)}{p(a)W(a)}y(s)\,\mathrm{d}s.$$

于是

$$u(t)=-\int_t^b \frac{u_1(t)u_2(s)}{p(a)W(a)}y(s)\,\mathrm{d}s-\int_a^t \frac{u_2(t)u_1(s)}{p(a)W(a)}y(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^b g(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s, \quad (5.2.14)$$

其中

$$g(t,s)=\begin{cases}\dfrac{-u_1(t)u_2(s)}{p(a)W(a)}, & a\leqslant t\leqslant s\leqslant b,\\ \dfrac{-u_2(t)u_1(s)}{p(a)W(a)}, & a\leqslant s\leqslant t\leqslant b.\end{cases} \quad (5.2.15)$$

$u(t)$ 满足边界条件, 即 $u\in\mathfrak{D}(L)$. □

注 1 L^{-1} 的定义域是 $\mathcal{R}(L)$, 由 $g(t,s)$ 是实的, 且 $g(s,t)=g(t,s)$, L^{-1} 是对称算子.

注 2 由定理 5.2.2, L 是对称算子, 所以 L 是可闭的, L 的闭包记为 $\overline{L}$, 可以证明 $\overline{L}$ 是自共轭的, 即 L 是本质自共轭的. 事实上, 当 0 不是特征值时, $\overline{L}^{-1}$ 是由 (5.2.14) 确定的定义在 $L^2[a,b]$ 上的紧的自共轭算子 ($\overline{L}^{-1}$ 是 L^{-1} 唯一确定的连续延拓, 在意义不混淆的情况下, 我们把 $\overline{L}^{-1}$ 仍记为 L^{-1}). 当 0 是特征值时, 由于 $\mathfrak{D}(L-\lambda I)=\mathfrak{D}(L)$, 可考虑 $L-\lambda I$, 使 0 不是它的特征值, 相类似地, 可知 L 是本质自共轭的且

$$((L-\lambda I)^{-1}y)(t)=\int_a^b g(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s, \quad (5.2.16)$$

其中 Green 函数 $g(t,s)=g(s,t)$.

注 3 (5.2.1) 定义的二阶对称微分算子, 带有两个分离的边界条件 (5.2.2), 即 Sturm-Liouville 算子, $\overline{L}$ 是自共轭的无界线性算子. 但是对于对称的二阶微分算式 (5.2.1), 还可以给出耦合的边界条件, 使之成为自共轭的线性算子, 参阅定理 5.4.1.

5.2.2 Sturm-Liouville 算子的谱

定理 5.2.5 设 L 是 Sturm-Liouville 算子, 那么 L 有至多可数个特征值且它们是实的.

证明 由于 L 是对称的, 其特征值是实的, 不同特征值对应的特征向量相互正交, 而 $L^2[a,b]$ 是可分的 Hilbert 空间, 因此只能存在至多可数个相互正交的向量, 即 L 的特征值至多可数. □

进一步地, 有

定理 5.2.6 设 L 是在 Hilbert 空间 H 上定义的 Sturm-Liouville 算子, 则

(1) 存在实数列 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots\}$ 和一组 H 的正交基 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots\}$, 使得 $\phi_n\in C^2[a,b]$ 且

$$L\phi_n=\mu_n\phi_n,\quad n=1,2,\cdots; \tag{5.2.17}$$

(2) 每一个 μ 在实数列中最多出现两次;

(3) 对于 $\forall y\in H$, 有

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}(y,\phi_n)\phi_n; \tag{5.2.18}$$

(4) 如果 $x\in\mathfrak{D}(L)$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2|(x,\phi_n)|^2<\infty \tag{5.2.19}$$

且

$$Lx=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(x,\phi_n)\phi_n. \tag{5.2.20}$$

证明 可选取实数 λ, 使 λ 不是 L 的特征值. $(L-\lambda I)^{-1}$ 是紧的自共轭的线性算子 (这里 $(L-\lambda I)^{-1}$ 是在定理 5.2.4 注 2 的意义下, 即定义域是全空间), 由紧算子的谱理论知, 存在实数列 $\{\widetilde{\mu}_1,\widetilde{\mu}_2,\cdots\}$ 和相对应的特征向量 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots\}$. 设 P_i 是相应的投影算子, 则

$$(L-\lambda I)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mu}_nP_n, \tag{5.2.21}$$

即 $(L-\lambda I)^{-1}$ 是一个投影算子的加权和. 由推论 2.3.13 知它的逆

$$L-\lambda I=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mu}_n^{-1}P_n, \tag{5.2.22}$$

即 Sturm-Liouville 算子可以表示成投影算子的加权和

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\widetilde{\mu}_n^{-1})P_n.$$

令 $\mu_n=\lambda+\widetilde{\mu}_n^{-1}$, 则

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_nP_n,$$

且相应的表示式 (5.2.17)、(5.2.18)、(5.2.19)、(5.2.20) 均成立.

由于 ϕ_n 是二阶具有连续系数微分方程的解, $\phi_n \in C^2[a,b]$ 且方程最多有两个线性无关解, 特征值的重数最多为 2, $\{\phi_n\}$ 组成 Hilbert 空间 H 一个完备正交基. □

注 由 (5.2.15) 知, $g(t,s) \in L^2([a,b]\times[a,b])$, L^{-1} 是以 Green 函数 $g(t,s)$ 为核的积分算子, L^{-1} 是紧算子, 且是 Hilbert-Schmidt 算子.

§5.3　高阶微分算子

5.3.1　最大最小算子和亏指数

在前两节已经可以看到, 由于微分算子是无界线性算子, 对其的研究工作就变得较为复杂, 并且定义域的选择不再是一个平凡的问题. 在后面可以看出, 定义域的选择是十分重要而且精细的.

我们考虑高阶形式的微分算子, 或者说是一个微分表示式.

$$\tau = p_n(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n + p_{n-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n-1} + \cdots + p_0(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i, \quad t \in I, \tag{5.3.1}$$

其中 I 是实轴上的一个区间, 可以是闭区间, 开区间, 或者是 $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$. $p_i(t)$ 是 τ 的系数函数, 为方便起见, 设 $p_i(t) \in C^\infty(I)$, 并且 $p_n(t) \neq 0$, $t \in I$, 对于 $p_n(t) \neq 0$ $(t \in I)$ 的 τ, 我们称之为规则的微分算式 (规则的形式微分算子), 本章考虑的均是规则的微分算子.

$$A^n = \{f | f\text{具有 } n-1 \text{ 阶连续导数}, f^{(n-1)} \text{ 在 } I \text{ 的任何紧子集上绝对连续}\}. \tag{5.3.2}$$

显然, 对于 $\forall f \in A^n$, $f^{(n)}$ 几乎处处存在, 并且在 I 的任何紧子集上可积, 因此对于 $f \in A^n$, τf 有确定的意义:

$$(\tau f)(t) = p_n(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n f(t) + \cdots + p_0(t)f(t). \tag{5.3.3}$$

我们首先考虑 τ 的共轭 τ^*. 令 $f, g \in C^n(I)$ (为简单起见, 令 $I=[a,b]$). 由分部积分可得到

$$\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k [p_k(t)\overline{g(t)}]\,\mathrm{d}t + [f,g]_b - [f,g]_a, \tag{5.3.4}$$

其中

$$[f,g] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i-1}\{p_k(t)\overline{g(t)}\}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k-i} f(t)\right] \tag{5.3.5}$$

称为与 τ 相应的契合函数, 显然它是关于 f,g 的共轭双线性型 (关于 f 线性, 关于 g 共轭线性). 令 $\tau^*(g)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k[\overline{p_k(t)}g(t)]$, 则 τ^* 称为 τ 的共轭微分算式, 且

$$\int_a^b(\tau f)(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\overline{\tau^*(g)}\,\mathrm{d}t+[f,g]_a^b, \tag{5.3.6}$$

其中 $[f,g]_a^b=[f,g](b)-[f,g](a)$. 进一步地, τ^* 可以写成

$$\tau^*=\sum_{j=0}^{n}b_j(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j, \tag{5.3.7}$$

其中

$$b_j(t)=\sum_{k=j}^{n}(-1)^k C_k^j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k-j}\overline{p_k(t)}. \tag{5.3.8}$$

当 τ 是规则的, τ^* 也是规则的. 如果 $\tau=\tau^*$, 则称 τ 是对称的微分表达式.

定义 5.3.1 设 Hilbert 空间 $L^2(I)$, τ 是一个在 I 上定义的规则的微分表示式, 令

$$H_\tau^n(I)=\{f\in A^n\,|\,f,\ \tau f\in L^2(I)\} \tag{5.3.9}$$

称为微分表达式 τ 的最大算子域. L_M 称为与 τ 相应的最大算子.

当 $I=[a,b]$ 时, 显然有

定理 5.3.2 设 τ 是 I 上定义的规则的微分算式, $f\in H_\tau^n(I)$, $g\in H_{\tau^*}^n(I)$, 则 Green 公式成立, 即

$$\int_a^b\tau(f)(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\overline{(\tau^*g(t))}\,\mathrm{d}t=[f,g]_a^b. \tag{5.3.10}$$

引理 5.3.3 设 τ 是 I 上定义的微分表示式, 则 $\tau=(\tau^*)^*$.

证明 设 τ 是 n 阶微分表示式, 则由 (5.3.7), $(\tau^*)^*$ 关于 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i$ 项的系数 c_i 为

$$\begin{aligned}c_i(t)&=\sum_{k=i}^{n}(-1)^kC_k^i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{k-i}\left(\sum_{j=k}^{n}(-1)^jC_j^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{j-k}p_j(t)\right)\\&=\sum_{\substack{j,k\\ i\leqslant k\leqslant j\leqslant n}}(-1)^j(-1)^kC_k^iC_j^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{j-i}p_j(t)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=i}^{j}(-1)^kC_j^kC_k^i\right\}(-1)^i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{j-i}p_j(t).\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

对 $x^j = (1-(1-x))^j$ 运用二次二项式定理, 有

$$\sum_{k=i}^{j}(-1)^k C_j^k C_k^i = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases} \tag{5.3.12}$$

于是 $c_i(t) = p_i(t)$, 即 $\tau^{**} = \tau^*$. □

注 1　这里没有要求 τ 是规则的.

注 2　可以证明如果 τ_1, τ_2 是微分表示式, 则

$$(\tau_1 + \tau_2)^* = \tau_1^* + \tau_2^*,$$

$$(\tau_1\tau_2)^* = \tau_2^*\tau_1^*.$$

由于 $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^* = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 我们有 $\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i\right)^* = (-1)^i\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i$, 且如果 $\tau_0 = p_0(t)$, 则 $\tau_0^* = \overline{p_0(t)}$. 因为 $\tau_1^*\tau_2^* = (\tau_2\tau_1)^*$, 于是

$$\tau_1 = \left(\sum_{i=0}^{n} p_i(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i\right)^* = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i\overline{p_i(t)}. \tag{5.3.13}$$

因此微分表示式

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i p_i(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i \tag{5.3.14}$$

是对称的, 只要 $p_i(t)$ 是实的. 当 $n=1$ 时, 即为 Sturm-liouville 算子. 更一般地, 有

定理 5.3.4　任何对称的 n 阶微分表达式 τ 可以写成如下形式

$$\tau = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j p_j(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j + i\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b_j(t) + b_j(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j, \tag{5.3.15}$$

其中 $p_j(t)$, $b_j(t)$ 都是实的.

特别地, 一个实的对称微分表达式必定是偶数阶 (例如 $2n$ 阶), 即可以表示成 (5.3.14) 的形式.

定义 5.3.5　设 H_τ^n 是 τ 生成的最大算子域, H_τ^n 中全体具有紧支柱的函数称为 τ 的预最小算子域, 记为 $H_0^n(I) = \{f \in H_\tau^n(I) | f$ 具有紧的支柱$\}$.

注　f 具有紧支柱, 即在 I 内部的一个紧集之外, $f(t) = 0$. 不同的 f 可以对应不同的紧子集. 这个紧子集称为 f 的紧支柱.

定义 5.3.6　设 τ 是一个 n 阶的微分表达式, 微分算子 $T_0(\tau)$, $T_1(\tau)$ 分别定义如下

$$T_0(\tau)f = \tau f, \quad f \in H_0^n(I).$$

$$T_1(\tau)f = \tau f, \quad f \in H_\tau^n(I).$$

显然 $T_0(\tau)$ 和 $T_1(\tau)$ 都是无界的, 稠定的线性算子且 $T_0(\tau) \subseteq T_1(\tau)$.

定理 5.3.7 设 τ 是在 I 上定义的 n 阶微分表示式, 那么 $T_1(\tau) = (T_0(\tau^*))^*$.

证明参阅 [2].

注 从上述定理可以看出 $T_1(\tau)$ 是一个闭的线性算子, 于是 $T_0(\tau) \subset T_1(\tau)$ 有闭的扩张, 记它的最小闭扩张为 $\overline{T_0(\tau)}$, 一般称为与 τ 相应的最小算子.

定理 5.3.8 设 τ 是对称的微分表示式, 则 $T_0(\tau)$ 是对称的微分算子.

同样可以定义 $T_0(\tau)$ 的亏指数. 由无界线性算子亏指数理论, 我们有

定理 5.3.9 设 τ 是对称的 n 阶微分表示式, 则 $T_0(\tau)$ 的正、负亏空间 D_+ 和 D_- 为

$$D_+ = \{f \in L^2 \big| (\tau - \mathrm{i})f = 0\}, \quad D_- = \{f \in L^2 \big| (\tau + \mathrm{i})f = 0\}.$$

显然, $T_0(\tau)$ 的正、负亏指数小于或等于 n.

定理 5.3.10 设 τ 是实的对称的微分算式, 则对称算子 $T_0(\tau)$ 有相等的亏指数, 且 $T_0(\tau)$ 最大的对称扩张是自共轭的.

证明 只要注意到 $(\tau - \mathrm{i})x = 0$ 的解是方程 $(\tau + \mathrm{i})x = 0$ 的解的复共轭, 定理可证. □

推论 5.3.11 设 τ 是定义在有限闭区间 I 上的 n 阶对称微分表达式, 则 $T_0(\tau)$ 的正负亏指数为 $n_+ = n_- = n$.

显然, 前两节中的一阶、二阶的微分算子同样可以采用上面的步骤加以定义并研究其亏指数.

5.3.2 具有紧预解算子的微分算子

由 5.2 节关于 S-L 问题的研究可以看到, 当 λ 是正则点时, $(L-\lambda I)^{-1}$ 是一个积分算子, 其核函数是 Green 函数, 它是平方可积的, $(L-\lambda I)^{-1}$ 是紧的. 对于 n 阶微分算子, 有类似的结果.

定理 5.3.12 设 τ 是定义在 I 上正则的 n 阶对称微分表达式, T 是 $T_0(\tau)$ 的自共轭扩张, 则对于 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, 预解算子 $R(\lambda, T)$ 是紧的, 如果以下条件: 区间 I 是紧的或者 $T_0(\tau)$ 的亏指数等于 n 之一成立.

证明 只要注意到当 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 时, $\tau\sigma = \lambda\sigma$ 的解均属于 $L^2(I)$ ($T_0(\tau)$ 的亏指数为 n). $(T-\lambda I)^{-1}$ 可以表示成积分算子, 其核函数 $k(t,s)$ 满足

$$\int_I \int_I |k(t,s,\lambda)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty.$$

可知 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是紧的, 即 $R(\lambda, T)$ 是紧的. □

由紧算子的谱理论, 与定理 5.2.6 的证明相似, 有

定理 5.3.13　设 Hilbert 空间 $H = L^2(I)$, τ 是一个 n 阶正则对称微分算式, T 是 $T_0(\tau)$ 的自共轭扩张, 使得当 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 时, 预解式 $R(\lambda, T)$ 是紧的, 则

(1) T 的谱是实轴上的一个点列, 且没有有限的聚点;

(2) T 的谱点全部是点谱, 且其重数不超过 n ;

(3) T 的特征函数系 $\{\varphi_n(t)\}$ 组成空间 H 的一个完备正交系.

对于一般的微分算子, 其谱分析是十分重要, 但也是十分困难的工作, 我们将在下一章里对高阶微分算子的谱的离数性, 谱的定性定量分析加以研究.

§5.4　极限点型和极限圆型微分算子的自共轭域

5.4.1　有限区间上定义的微分算子的自共轭域

设 τ 是定义在 Hilbert 空间 H 中的 n 阶对称微分表示式, $T_0(\tau) \subset T_1(\tau) = T_0^*(\tau)$, 即 $T_0(\tau)$ 是一个对称微分算子, 特别当 τ 是实的时, $T_0(\tau)$ 的上下亏指数相等, 则存在 $T(\tau)$, 使得 $T_0(\tau) \subset T(\tau) \subset T_1(\tau)$ 且 $T(\tau) = T^*(\tau)$. $T(\tau)$ 和 $T_0(\tau)$ 的运算方式一样, $\mathfrak{D}(T_0) \subset \mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(T_1)$, 且 $\mathfrak{D}(T_0)$ 在 Hilbert 空间 H 中是一个稠密的线性子空间. 因此在微分算式 τ 确定的前提下, 如何描述自共轭微分算子就是如何来界定 $T(\tau)$ 所作用的空间范围, 即如何描述在 H 中它赖以定义的稠密的线性流形. 自共轭算子的解析描述, 是常微分算子理论中一个长时间未完全解决的问题. 内蒙古大学微分算子研究集体, 经过十几年的努力, 先后给出了二阶、高阶、具有中间亏指数等微分算子自共轭域的完全解析描述.

对自共轭微分算子的研究, 最早可追溯到经典的 Sturm-Liouville (S-L) 问题, 令 $\tau y = -(py')' + qy$, 在 $H_\tau^2[a,b]$ 上考虑

$$\begin{cases} -(py')' + q(t)y = \lambda y, \\ y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0, \end{cases} \tag{5.4.1}$$

其中 $q(t)$ 是实值函数.

由 5.2 节知 S-L 问题是一个自共轭的微分算子. 我们注意到, 其边界条件是端点分离的边界条件. 事实上, 它们仅仅是二阶自共轭微分算子的一种特殊形式, 满足一定条件的混合边界条件界定的线性子空间, 也可以确定一个自共轭的微分算子. 进一步地, 如何描述 n 阶微分算子的自共轭域? 当区间 $I = [a, b]$ (有界闭区间) 时, 这个问题在 20 世纪 50 年代得到完全解决. 1954 年由 E.A.Coddington 给出.

定理 5.4.1　设 τ 为 $I = [a, b]$ 上定义的 n 阶对称微分表示式, 则边界条件

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} y^{(j-1)}(a) + b_{ij} y^{(j-1)}(b)) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{5.4.2}$$

在 $H_\tau^n(I)$ 中所界定的线性流形是自共轭域的充要条件是

$$AQ^{-1}(a)A^* = BQ^{-1}(b)B^*, \tag{5.4.3}$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$, $Q(t)$ 是与 τ 相应的契合矩阵, 即 $T_0\subset T\subset T_1$, T 定义为

$$\begin{aligned}&Ty=\tau y,\\&\mathfrak{D}(T)=\{y\in H_\tau^2(I)|y \text{ 满足边界条件 } (5.4.2)、(5.4.3)\},\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

则 T 是自共轭的 n 阶微分算子.

5.4.2 无穷区间上定义的微分算子的自共轭域

当问题转到奇型微分算子, 即 τ 定义在无界区域上时 (为叙述简便起见, 以下不妨设 $I=[a,\infty)$), 问题有了本质上的不同, 1910 年 H.Weyl 证明了在 $[0,\infty)$ 上定义的二阶对称算子式 τ, 可以区分为两种类型, 即所谓的极限点型和极限圆型.

由于极限点型亏指数为 $(1,1)$, 极限圆型亏指数为 $(2,2)$, $T_0(\tau)$ 均有自共轭扩张 T (或者说 T 是 $T_1(\tau)$ 的一个限制). 在极限点型, 由于亏指数为 (1,1), 只需给出有限端点上的边界条件, 即可生成自共轭算子, 它的谱集可能出现连续谱. 而对于后一种情况, 亏指数为 (2,2), 则需加上在无穷远点处的边界条件, 才能生成自共轭算子. 当微分表示式 τ 的阶数高于 2 时, 问题更加显现复杂性. 20 世纪 40 年代, 著名数学家 E. C. Titchmarsh 用 Weyl 圆套方法得到了 $\tau y=\lambda y$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$ 的解 (称为 Weyl 解), 并给出在无穷区间 $[a,\infty)$ 上定义的二阶对称微分表示式的自共轭域的解析描述.

定理 5.4.2 设 τ 为定义在 $I=[a,\infty)$ 上的二阶对称微分表示式, $\psi(t,\lambda)$ 是 $\tau y=\lambda y$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$ 的 Weyl 解, 则在 $H_\tau^2(I)$ 中由边界条件

$$y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0, \tag{5.4.5}$$

$$[y,\psi(t,\lambda)](\infty)=0 \tag{5.4.6}$$

所界定的线性子空间是自共轭域, 称为 Weyl-Titchmarsh 域, 即 $T_0(\tau)\subset T(\tau)\subset T_1(\tau)$. $T(\tau)$ 定义为

$$Ty=\tau y,\ \ \mathfrak{D}(T)=\{y\in H_\tau^n(I)|y \text{ 满足边界条件 } (5.4.5)、(5.4.6)\}, \tag{5.4.7}$$

则 T 是二阶自共轭微分算子.

可以证明, 在极限点的情形, 边界条件 (5.4.6) 恒成立, 即边界条件 (5.4.5) 给出了自共轭域的完全描述. 然而当 τ 为极限圆时, Weyl-Titchmarsh 域未能概括全部自共轭边界条件, 如同 S-L 问题, 仅仅是一种分离的边界条件.

1982 年, 内蒙古大学曹之江根据对称算子自共轭扩张的构造理论, 对于定义在无穷区间上的二阶对称微分算子 $\overline{T_0(\tau)}$ 的自共轭扩张, 给出了一种直接而完全的描述, 并且证明了 Weyl-Titchmarsh 域作为一种特款含于其中, 完全解决了无穷区间上二阶自共轭微分算子的解析描述问题.

曹之江给出的边界条件为

$$-a_j y(a) + b_j p(0) y'(a) + \alpha_j [y, \varphi](\infty) - \beta_j [y, \psi](\infty) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{5.4.8}$$

其中 φ, ψ 为 $\tau(y) = 0$ 的解, 满足初始条件 $[\varphi\varphi](a) = [\psi\psi](a)$, $[\varphi\psi](a) = 1$, 系数组 $\{a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j\}$ $(j = 1, 2)$ 满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = 2, \tag{5.4.9}$$

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ \bar{a}_j & \bar{b}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \bar{\alpha}_j & \bar{\beta}_j \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 2. \tag{5.4.10}$$

定理 5.4.3　设 τ 为定义在 $I = [a, +\infty)$ 上的极限圆型二阶对称微分表示式, 任一函数集 $D \subset H_\tau^2(I)$ 为 τ 的自共轭域的充要条件为它是由边界条件 (5.4.8), 以及 (5.4.9)、(5.4.10) 所界定的线性子空间.

对于在 $[a, +\infty)$ 上定义的对称微分表示式, 当阶数 n 高于 2 时, 由于其亏指数 (n_+, n_-) 取值的多样性, 因而其自共轭域的描述问题, 自然变得更加复杂, 为研究自共轭扩张, 下面只考虑 $n_+ = n_-$ 的情况.

20 世纪 60 年代, 英国著名数学家 W. N. Everitt 的一系列工作, 运用了独到的 Gram 矩阵法, 解决了在高阶情况下, 在无穷远点的边界条件构造上的困难, 对于 n 阶对称微分表示式中两种重要的特殊情况 (即极限点和极限圆情况), 给出相当于二阶的 Weyl-Titchmarsh 域的描述.

定理 5.4.4　设 τ 为 $I = [a, +\infty)$ 上定义的 n 阶复对称微分表示式, φ_r, χ_r 是 $\tau y = \lambda y$ $(\text{Im}\lambda \neq 0)$ 满足一定条件的解, $x \in L^2(I)$ 则 $H_\tau^n(I)$ 中有如下边界条件:

当 $n = 2k$ 时,

$$\begin{cases} [y, \varphi_r(t, \lambda)](a) = 0, & r = 1, 2, \cdots, k, \\ [y, \chi_r(t, \lambda)](\infty) = 0, & r = 1, 2, \cdots, k. \end{cases} \tag{5.4.11}$$

当 $n = 2k - 1$ 时,

$$\begin{cases} [y, \varphi_r(t, \lambda)](a) = 0, & r = 1, 2, \cdots, k-1, \\ [y, \chi_r(t, \lambda)](\infty) = 0, & r = 1, 2, \cdots, k-1, \\ [y, \varphi_k(t, \lambda)](a) + [y, \chi_k(t, \lambda)](\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.4.12}$$

所界定的线性子空间是自共轭域, 称为 Everitt 域.

Everitt 域把二阶的 Weyl-Titchmarsh 域推广到高阶的情况. 可以证明, 当 $n=2k$, τ 是极限点型时, 上式在 ∞ 点边界条件成为恒等式, 这时 Everitt 域给出了 n 阶微分表示式 τ 的自共轭域的完全描述 (任何自共轭域均为 Everitt 域). 但在极限圆的情况下 (5.4.11)、(5.4.12) 均远未包罗 τ 的全部自共轭域.

1983 年, 内蒙古大学曹之江独辟蹊径, 从对称算子自共轭域的构造原理出发, 完全避开了旧方法在无穷远处边界条件在解的构造上的困难, 最终获得了任意高阶极限圆型微分表达式 τ 的自共轭域的一种直接而完全的描述, 曹之江给出的边界条件为

$$M\begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} - N\begin{pmatrix} [y,\varphi_1](\infty) \\ [y,\varphi_2](\infty) \\ \vdots \\ [y,\varphi_n](\infty) \end{pmatrix} = 0, \tag{5.4.13}$$

其中 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是 $\tau(y)=0$ 的一组线性独立解, 满足条件

$$[\varphi_i,\varphi_j](a)=J,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n, \tag{5.4.14}$$

这里 J 是由 τ 唯一确定的非奇异的 Skew-Hermite 矩阵, 系数矩阵 M, N 满足

$$\operatorname{rank}(M\oplus N)_{n\times 2n}=n, \tag{5.4.15}$$

$$NJN^*+MQ^{-1}(a)M^*=0. \tag{5.4.16}$$

定理 5.4.5 设 τ 是定义在 $I=[a,+\infty)$ 上的 n 阶对称微分表示式, 任一函数集合 $D\subset H_\tau^n(I)$ 为 τ 的自共轭域的充要条件为它是由边界条件 (5.4.13) $\sim$ (5.4.16) 所界定的线性子空间.

称这个自共轭域为曹域, 可以证明 Everitt 域是曹域的一种特例. 定理 5.4.5 给出了高阶极限圆型对称微分表示式自共轭域的完全解析描述.

上述定理证明可参阅 [2] 及 [3].

§5.5 具有中间亏指数奇型微分算子的自共轭扩张

5.5.1 亏指数的取值范围

前一节, 我们运用曹之江的方法, 给出了由高阶微分表示式 τ 所生成的最小算子 $\overline{T_0(\tau)}$ 在极限圆和极限点情况下的自共轭扩张完全而解析的描述. 对于高阶微

分表达式, 其亏指数取值范围较为复杂. 考虑 n 阶规则的对称微分算式

$$\tau(y) = (-1)^n(p_n y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_{n-1}y^{(n-1)})^{(n-1)} + \cdots + p_0 y, \quad t \in [a, +\infty), \tag{5.5.1}$$

其中系数 $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是实的. 由于 τ 是实对称的, τ 的亏指数满足 $n^+ = n^-$, $T_0(\tau)$, $\overline{T_0(\tau)}$, $T_1(\tau)$ 如同上节定义, 于是一定存在 $\overline{T_0(\tau)}$ 的自共轭扩张. 当 $n = 1$ 时, 则只有 $n^+ = n^- = 1$, $n^+ = n^- = 2$ 两种情况, 即极限点和极限圆型. 与二阶不同, 在高阶的情况, 1950 年, 苏联的 I.M.Glazman 证明了对于介于 $n \leqslant p \leqslant 2n$ 间的任何自然数 p, 亏指数 (p, p) 都可以实现, 即一定存在具有亏指数为 (p, p) 的 $2n$ 阶微分表示式 τ. 一般我们仍然称亏指数为 (n, n) 的 τ 为极限点型, 亏指数为 $(2n, 2n)$ 的 τ 为极限圆型. 亏指数为 $p(n < p < 2n)$ 的 τ 为具有中间亏指数的微分表示式.

至于复系数的微分表达式亏指数的值域是什么情况, 这一问题至今尚未得到完全解决. 1959 年 W.N.Everitt 等首先讨论了这一问题, 并且得到

定理 5.5.1　设 τ 为 n 阶微分表达式

$$\tau(y) = p_n(t)y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)y, \quad t \in [a, +\infty). \tag{5.5.2}$$

τ 的亏指数有以下关系:

(1) 当 $n = 2r$ 时, $r \leqslant n^+, n^- \leqslant n$;

(2) 当 $n = 2r - 1$ 时,

$$r - 1 \leqslant n^+ \leqslant n,\ r \leqslant n^- \leqslant n, \text{或者 } r \leqslant n^+ \leqslant n,\ r - 1 \leqslant n^- \leqslant n;$$

(3) $n^+ = n$ 当且仅当 $n^- = n$.

问题是以上条件是否是约束亏指数值域的所有条件, n^+, n^- 可以相差多少?

1977 年, Gilbert 给出了一个对称微分算子, 亏指数为 $(3, 5)$, 给出了 $|n^+ - n^-| = 2$ 的例子. 之后他又证明了对于任何自然数 $p \geqslant 2$, 均可以构造出 $n = 4p - 1$ 阶的对称微分表示式 τ, 使 τ 的亏指数满足 $|n^+ - n^-| = p$, 但这个差值是否一定要在 $4p - 1$ 阶微分表示式中实现, 目前仍不清楚.

5.5.2　最大算子域的分离性刻画

对于一端正则, 一端奇异的, 即 $[0, +\infty)$ 上定义的高阶微分表示式自共轭扩张的描述问题, 由于无成法可依, 而显得十分困难. 作者在 20 世纪 80 年代中期, 考虑并研究了定义在 $[0, +\infty)$ 上的具有中间亏指数的微分算子自共轭边界条件的描述问题, 从微分算子最大算子域和最小算子域的结构上考虑, 对最大算子域 $D_M = D_0 + D_+ + D_-$ 的描述, 提出了有限端点和无穷远点两个部分分离开来加以刻画的

思路, 给出了解决问题的关键步骤, 完全解决了具有中间亏指数的微分算子自共轭扩张问题.

引理 5.5.2 设 $\tau(y)$ 是 (5.5.2) 定义的微分表示式, D_M, D_0 是与 $\tau(y)$ 相联系的最大、最小算子域. $\tau(y)$ 具有相等的亏指数 (m,m), $\lambda\in\mathbb{C}$, 且 $\mathrm{Im}\lambda\neq 0, \phi_1(x,\lambda),\phi_2(x,\lambda),\cdots, \phi_m(x,\lambda)$, 是 $\tau(y)=\lambda y$ 的属于 $L^2[0,+\infty)$ 的线性无关解, $\psi_1(x,\overline{\lambda})$, $\psi_2(x,\overline{\lambda})$, $\cdots$, $\psi_m(x,\overline{\lambda})$ 是 $\tau(y)=\overline{\lambda}y$ 的属于 $L^2[a,+\infty)$ 的线性无关解, 则对任何 $y\in D_M$, 我们有唯一的分解形式:

$$y=y_0+\sum_{i=1}^{m}c_i\phi_i(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{m}d_i\psi_i(x,\overline{\lambda}), \tag{5.5.3}$$

其中 $y_0\in D_0$.

注 即 $D_M=D_0\dot{+}D_+\dot{+}D_-$ (证明参阅定理 3.4.7). 为方便起见, 令

$$\begin{gathered}x_1=\phi_1(x,\lambda),\quad x_2=\phi_2(x,\lambda),\quad \cdots,\quad x_m=\phi_m(x,\lambda),\\ x_{m+1}=\psi_1(x,\overline{\lambda}),\quad x_{m+2}=\psi_2(x,\overline{\lambda}),\quad \cdots,\quad x_{2m}=\psi_m(x,\overline{\lambda}),\end{gathered} \tag{5.5.4}$$

那么, 对于 $\forall y\in D_M$,

$$y=y_0+\sum_{i=1}^{2m}a_ix_i,\quad y_0\in D_0, \tag{5.5.5}$$

且这个表示式是唯一的. □

引理 5.5.3 设 $\tau(y)$ 如 (5.5.2) 定义, 令

$$X=([x_i,x_j](\infty))_{1\leqslant i,j\leqslant 2m},$$

其中 $\{x_i\}_{i=1}^{2m}$ 如 (5.5.4) 所定义. $[\cdot,\cdot]$ 是与 $\tau(y)$ 相关的 Lagrange 双线性型, 则

$$\mathrm{rank}X=2m-n.$$

证明 设 $z_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 D_M 中的一组函数, 满足下列条件:

$$z_i^{(k-1)}(0)=\delta_{ik},\quad z_i^{(k-1)}(1)=0,\quad k,i=1,2,\cdots,n, \tag{5.5.6}$$

$$z_i(t)=0,\quad t\geqslant 1. \tag{5.5.7}$$

这样的函数的存在性可参阅 [23] 第五章 17 节. 由 (5.5.5) 知

$$z_i=y_{i0}+\sum_{j=1}^{2m}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{5.5.8}$$

其中 $y_{i0} \in D_0$. 因此

$$z_i^{(k-1)} = y_{i0}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{2m} a_{ij} x_j^{(k-1)}, \quad i,k = 1,2,\cdots,n.$$

因为 $y_{i0}^{(k-1)}(0) = 0\ (i,k = 1,2,\cdots,n)$, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) & \cdots & x_1^{(n-1)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{2m}(0) & \cdots & x_{2m}^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}. \tag{5.5.9}$$

因此

$$\operatorname{rank}(a_{ij}) = n, \quad \operatorname{rank}(x_j^{(k-1)}(0)) = n.$$

由 (5.5.8),

$$[z_i, x_s](\infty) = [y_{i0}, x_s](\infty) + \sum_{j=1}^{2m} a_{ij}[x_j, x_s](\infty),$$

$$i = 1,2,\cdots,n; s = 1,\cdots,2m. \tag{5.5.10}$$

注意到 $z_i(t) = 0\ (t \geqslant 1)$, 有 $[z_i, x_s](\infty) = 0$, 从而

$$0 = (a_{ij})_{n\times 2m}([x_j, x_s](\infty))_{2m\times 2m}. \tag{5.5.11}$$

于是, 我们有

$$\operatorname{rank}([x_j, x_s](\infty)) \leqslant 2m - n. \tag{5.5.12}$$

由于 $\varphi(t,\lambda)$, $\psi(t,\overline{\lambda})$ 是相应微分方程的解, 由 $[\cdot,\cdot]$ 的定义可以验证

$$[\varphi(t,\lambda), \psi(t,\overline{\lambda})](t) = [\varphi(t,\lambda), \psi(t,\overline{\lambda})](0).$$

因此

$$[\varphi(t,\lambda), \psi(t,\overline{\lambda})](\infty) = [\varphi(t,\lambda), \psi(t,\overline{\lambda})](0). \tag{5.5.13}$$

由 (5.5.4), 有

$$\begin{aligned}\big([x_i, x_j](\infty)\big)^{\mathrm T}_{1\leqslant i\leqslant m, m+1\leqslant j\leqslant 2m} &= \big([\varphi_k(t,\lambda), \psi_s(t,\overline{\lambda})](\infty)\big)^{\mathrm T}_{1\leqslant k,s\leqslant m} \\ &= \big([\varphi_k(t,\lambda),\ \psi_s(t,\overline{\lambda})](0)\big)^{\mathrm T}_{1\leqslant k,s\leqslant m} \\ &= \Psi^*(0,\overline{\lambda})Q(0)\Phi(0,\lambda),\end{aligned}$$

其中 T 表示共轭转置, $Q(t)$ 是与 $[\cdot,\cdot]$ 相关的矩阵.

$$\Psi(0,\overline{\lambda})=\begin{pmatrix}\psi_1(0) & \psi_1'(0) & \cdots & \psi_1^{(n-1)}(0)\\ \psi_2(0) & \psi_2'(0) & \cdots & \psi_2^{(n-1)}(0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \psi_m(0) & \psi_m'(0) & \cdots & \psi_m^{(n-1)}(0)\end{pmatrix},$$

$$\Phi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_1'(0) & \cdots & \varphi_1^{(n-1)}(0)\\ \varphi_2(0) & \varphi_2'(0) & \cdots & \varphi_2^{(n-1)}(0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_m(0) & \varphi_m'(0) & \cdots & \varphi_m^{(n-1)}(0)\end{pmatrix}.$$

由于

$$\text{rank}\Phi(0,\lambda)=m,\quad \text{rank}\Psi(0,\overline{\lambda})=m,\quad \text{rank}Q(0)=n,$$

因此

$$\text{rank}\big([x_i,x_j](\infty)\big)^{\text{T}}_{1\leqslant i\leqslant m,m+1\leqslant j\leqslant 2m}\geqslant 2m-n. \tag{5.5.14}$$

于是

$$\text{rank}([x_i,x_j](\infty))^{\text{T}}_{1\leqslant i,j\leqslant 2m}\geqslant 2m-n. \tag{5.5.15}$$

结合 (5.5.12) 有

$$\text{rank}([x_i,x_j](\infty))=2m-n. \qquad \square$$

由定理的证明过程可知

推论 5.5.4

$$X=\begin{pmatrix}F_{1(m\times 2m)}\\ F_{2(m\times 2m)}\end{pmatrix},$$

则 $\text{rank}F_1=\text{rank}F_2=2m-n$.

因为 $\text{rank}F_1=2m-n$, 不失一般性, 我们可以假设 F_1 的前 $2m-n$ 行是线性无关的. 记前 $2m-n$ 行为

$$E_1=([x_i,x_j](\infty))_{1\leqslant i\leqslant 2m-n,\ 1\leqslant j\leqslant 2m}, \tag{5.5.16}$$

则

$$\text{rank}E_1=2m-n. \tag{5.5.17}$$

引理 5.5.5　设 $\{x_i\}_{i=1}^{2m}$ 由 (5.5.4) 定义且满足 (5.5.17), 那么 $x_i\,(i=2m-n+1,\cdots,2m)$ 有唯一表示式

$$x_i=\widetilde{y}_{i0}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}z_i+\sum_{s=1}^{2m-n}b_{is}x_s,\quad i=2m-n+1,\cdots,2m,\tag{5.5.18}$$

其中 $\widetilde{y}_{i0}\in D_0, z_i$ 满足 (5.5.6) 和 (5.5.7).

证明　考虑方程组

$$z_i=y_{i0}+\sum_{i=1}^{2m}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{5.5.19}$$

由 (5.5.11) 可推出 (a_{ij}) 中后 n 列的系数矩阵的秩是 n, 即 $x_j\ (j=2m-n+1,\cdots,2m)$ 可以从 (5.5.19) 中解出. □

注　令

$$X_1=([x_i,x_j](\infty))_{1\leqslant i,j\leqslant 2m-n},\tag{5.5.20}$$

则由 (5.5.18) 和 (5.5.17) 推知 $\mathrm{rank}X_1=2m-n$.

定理 5.5.6　$\tau(y)$, $\{x_i\}_{i=1}^{2m}$, $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ 如上定义, 则对于任意的 $y\in D_M$, 它有唯一的分解

$$y=y_0+\sum_{j=1}^{n}d_jz_j+\sum_{s=1}^{2m-n}\tau_sx_s,\tag{5.5.21}$$

其中 $y_0\in D_0$.

证明　由于 $y\in D_M$ 有唯一分解式

$$y=\widetilde{y}_0+\sum_{i=1}^{2m}a_ix_i,$$

其中 $\widetilde{y}_0\in D_0$. 由引理 5.5.5, 有

$$y=\widetilde{y}_0+\sum_{i=1}^{2m-n}a_ix_i+\sum_{r=2m-n+1}^{2m}a_r\left[\widetilde{y}_{r0}+\sum_{j=1}^{n}c_{rj}z_j+\sum_{s=1}^{2m-n}b_{rs}x_s\right].$$

记

$$\widetilde{y}_0+\sum_{r=2m-n+1}^{2m}a_r\widetilde{y}_{r0}=y_0\in D_0,$$

$$\sum_{r=2m-n+1}^{2m}a_rc_{rj}=d_j,$$

以及

$$a_s + \sum_{r=2m-n+1}^{2m} a_r b_{rs} = \tau_s,$$

则结论 (5.5.21) 成立. 由引理 5.5.5, x_i 表示的唯一性, 知 (5.5.21) 的分解是唯一的. □

注 1 令 $D_1 = \mathrm{span}\{z_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$, $D_2 = \mathrm{span}\{x_i | i = 1, 2, \cdots, 2m-n\}$, 则由定理可知 $D_M \subset D_0 \dot{+} D_1 \dot{+} D_2$, 另外, 显然有 $D_M \supset D_0 + D_1 + D_2$, 于是

$$D_M = D_0 \dot{+} D_1 \dot{+} D_2. \tag{5.5.22}$$

注 2 由于 $z_i(t) = 0\ (t \geqslant 1)$, 上面的分解从构造上把 D_M 在无穷远点的性质分离出来, 仅由 D_2 来刻画, 而在 0 点的性质, 由 D_1 来刻画.

5.5.3 微分算子自共轭域的完全刻画

定理 5.5.7 (GKN)[23] 设 $\tau(y)$ 的亏指数为 (m, m), $\nu_i \in D_M\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 满足下列条件:

(1) ν_i 的任何非平凡线性组合不属于 D_0;

(2) $[\nu_i, \nu_j]_0^\infty = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 那么集合

$$D = \{y \in D_M | [y, \nu_i]_0^\infty = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)\} \tag{5.5.23}$$

是 $\tau(y)$ 的自共轭域.

反之, $\tau(y)$ 的任何自共轭域, 都存在 $\nu_i \in D_M\ (i = 1, 2, \cdots, m)$, 满足以上条件 (1) 和 (2), 使得 (5.5.23) 成立 (参阅 [23]).

令

$$B = \begin{pmatrix} [x_1, x_1](\infty) & \cdots & [x_{2m-n}, x_1](\infty) \\ \vdots & & \vdots \\ [x_1, x_{2m-n}](\infty) & \cdots & [x_{2m-n}, x_{2m-n}](\infty) \end{pmatrix}, \tag{5.5.24}$$

其中 $\{x_i\}_{i=1}^{2m-n}$ 由 (5.5.4) 定义且满足条件 (5.5.20).

定理 5.5.8 设 $\tau(y)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的 n 阶正则对称微分表示式, 其亏指数为 (m, m) $\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right] \leqslant m \leqslant n\right.$, 这里 $[\ \ ]$ 表示其整数部分 $\left.\right)$, $M_{m \times n}$, $N_{m \times (2m-n)}$ 是数值矩阵, 并且满足下列条件:

$$\mathrm{rank}[M \oplus N] = m, \tag{5.5.25}$$

$$MQ^{-1}(0)M^* + NBN^* = 0, \tag{5.5.26}$$

那么集合

$$D = \left\{ y \in D_M \middle| M \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} [y, x_1](\infty) \\ \vdots \\ [y, x_{2m-n}](\infty) \end{pmatrix} = 0 \right\} \tag{5.5.27}$$

是一个自共轭域, 其中 $\{x_i\}_{i=1}^{2m-n}$ 满足 (5.5.24). 即

$$L(y) = \tau(y), \quad y \in D \tag{5.5.28}$$

是一个 n 阶自共轭微分算子.

反之, 如果 D 是一个自共轭域, 则一定存在 $M_{m\times n}$ 和 $N_{m\times(2m-n)}$ 阶矩阵, 满足条件 (5.5.25)、(5.5.26), 并且 D 由 (5.5.27) 定义.

注 这里 $[M \oplus N]$ 记由 M 和 N 的列合并组成的一个新的矩阵.

证明 记

$$-Q^{-1}(0)M^* = (\rho_{ij})_{n\times m},$$

$$N = (\overline{\tau}_{ij})_{m\times(2m-n)},$$

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{5.5.29}$$

令 $v_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 D_M 中满足下列条件的函数

$$v_i^{(j-1)}(0) = \rho_{ji}, \quad v_i^{(j-1)}(1) = \omega_i^{(j-1)}(1),$$

并且当 $t \geqslant 1$ 时,

$$v_i(t) = \omega_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{5.5.30}$$

由于 $Q^*(t) = -Q(t)$, 我们有

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = (\rho_{ij})^* Q(0) \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = V^*(0)Q(0)C(y) = \begin{pmatrix} [y, v_1](0) \\ \vdots \\ [y, v_m](0) \end{pmatrix},$$

以及

$$N \begin{pmatrix} [y, x_1](\infty) \\ \vdots \\ [y, x_{2m-n}](\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[y, \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{1j} x_j \right](\infty) \\ \vdots \\ \left[y, \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{mj} x_j \right](\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [y, v_1](\infty) \\ \vdots \\ [y, v_m](\infty) \end{pmatrix}.$$

于是, 边界条件 (5.5.27) 转化成为边界条件 (5.5.23). 剩下的只需证明 $\{\nu_i\}_{i=1}^m$ 满足定理 5.5.7 中的条件 (1) 和 (2).

假如 (1) 不成立, 则存在不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_m$, 使得

$$u=\sum_{i=1}^m c_i v_i \in D_0.$$

因此

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = V(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}=0,$$

但是

$$V(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}=(\rho_{ij})\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}=-Q^{-1}M^*\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

因为 $Q^{-1}(0)$ 的秩为 n, 因此 $(\bar{c}_1\cdots\bar{c}_m)M=0$.

我们注意到当 $t\geqslant 1$, $v_i=\omega_i=\sum\limits_{i=1}^{2m-n}\tau_{ij}x_i$, 所以 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iv_i=\sum\limits_{i=1}^{m}c_i\cdot\sum\limits_{j=1}^{2m-n}\tau_{ij}x_j$ $(t\geqslant 1)$. 同时因为 $u\in D_0$, 对于 $\forall y\in D_M$, 有 $[u,y](\infty)=0$, 因此

$$\begin{aligned}(0\cdots 0)&=([u,x_1](\infty)\cdots[u,x_{2m}](\infty))\\ &=(c_1\cdots c_m)(\tau_{ij})\begin{pmatrix}[x_1,x_1](\infty) & \cdots & [x_1,x_{2m}](\infty)\\ \vdots & & \vdots \\ [x_{2m-n},x_1](\infty) & \cdots & [x_{2m-n},x_{2m}]\end{pmatrix}\\ &=(c_1\cdots c_m)(\tau_{ij})E_1.\end{aligned}$$

由 (5.5.17) 知 $\mathrm{rank}E_1=2m-n$, 有

$$(\bar{c}_1\cdots\bar{c}_m)N=0.$$

因此

$$(\bar{c}_1\cdots\bar{c}_m)(M\oplus N)=0.$$

这与条件 $\mathrm{rank}(M\oplus N)=m$ 矛盾.

以下证明条件 (2). 由 (5.5.29) 和 (5.5.30),

$$[v_i, v_j](\infty) = \left[\sum_{r=1}^{2m-n} \tau_{ir} x_r, \sum_{r=1}^{2m-n} \tau_{js} x_s\right](\infty)$$
$$= \sum_{r=1}^{2m-n} \sum_{s=1}^{2m-n} \tau_{ir} \overline{\tau}_{js} [x_r, x_s](\infty), \quad i, j = 1, 2, \cdots, m,$$

即

$$([v_i, v_j](\infty))_{m\times m}^{\mathrm{T}} = NBN^*.$$

另一方面,

$$([v_i, v_j](0))_{m\times m}^{\mathrm{T}} = V^*(0)Q(0)V(0)$$
$$= (-Q^{-1}(0)M^*)^* Q(0)(-Q^{-1}(0)M^*) = -MQ^{-1}(0)M^*,$$

即

$$([v_i, v_j]_0^\infty)^{\mathrm{T}} = MQ^{-1}(0)M^* + NBN^* = 0.$$

下面证明定理的后半部, 即条件 (5.5.27) 的必要性. 设 D 是 $\tau(y)$ 的自共轭域, 由定理 5.5.7 知, 存在 $\{v_i\}_{i=1}^m$. 使之满足条件 (1) 和 (2), 根据定理 5.5.6,

$$v_i = y_{i0} + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_j + \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

其中 $y_{i0} \in D_0$, 令

$$M_{m\times n} = V^*(0)Q(0), \quad N_{m\times(2m-n)} = (\overline{\tau}_{ij}).$$

于是

$$\begin{pmatrix} [y, v_1](0) \\ \vdots \\ [y, v_m](0) \end{pmatrix} = V^*(0)Q(0)C(y) = M \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}.$$

同时

$$\begin{pmatrix} [y, v_1](\infty) \\ \vdots \\ [y, v_m](\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[y, \left(y_{10} + \sum_{j=1}^{n} d_{1j} z_j + \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{1j} x_j\right)\right](\infty) \\ \vdots \\ [y, (y_{m0} + \sum_{j=1}^{n} d_{mj} z_j + \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{mj} x_j)](\infty) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left[y, \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{1j} x_j\right](\infty) \\ \vdots \\ \left[y, \sum_{j=1}^{2m-n} \tau_{mj} x_j\right](\infty) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} [y, x_1](\infty) \\ \vdots \\ [y, x_{2m-n}](\infty) \end{pmatrix}.$$

因此边界条件 (5.5.23) 转化为边界条件 (5.5.27). 这样只需证明 M, N 满足条件 (5.5.25) 和 (5.5.26).

与上面充分性证明相似, 如果条件 (5.5.25) 不成立, 将推出存在 $\{v_i\}_{i=1}^{m}$ 的非平凡线形组合, 使之属于 D_0. 同时由于 M, N 的选择, 定理 5.5.7 中的条件等同于 (5.5.26), 细节可参阅 [48]. □

注 1 定理给出了 $\tau(y)$ 具有等值亏指数 (m,m) 时, 所有自共轭扩张的完全描述. 当 $m=n$ 时, 为最大亏指数的情况, 当 $m=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ 时, 为最小亏指数情况.

注 2 在最大亏指数情况, 即当 $m=n$ 时, $2m-n=n$, 由于这时 $\tau(y)=\lambda y$ (λ 是实数) 的 n 个解均属于 $L^2[0,+\infty)$. 于是定理 5.5.8 中的 x_i 可以取 $\tau(y)=0$ ($\lambda=0$) 的解, 即定理 5.4.5 是定理 5.5.8 的特例.

注 3 当 $\tau(y)$ 是实系数对称微分算子, 阶数 n 为偶数 ($n=2k$), 且具有最小亏指数 $m=k$ 时, 由于 $2m-n=0$, 即自共轭的边界条件只需加在有限端点处, 则在无穷远处不需加任何边界条件.

注 4 定理 5.5.8 概括了 Everitt 对于定义在 $[a,+\infty)$ 上高阶微分算子给出的一些分离边界条件的自共轭域, 可以证明 Everitt 域均为定理 5.5.8 的特例 (见 [48]).

注 5 当 $\tau(y)$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上的正则对称微分算子时, $\tau(y)$ 的亏指数为 $(n,\ n)$. 由定理 5.5.8 的结论也可以描述其自共轭域, 令

$$A=M,\ \ B=-N\Phi^*(b,\lambda)Q(b).$$

则边界条件 (5.5.27) 转化为

$$A\begin{pmatrix} y(a) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{pmatrix}+B\begin{pmatrix} y(b) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}=0.$$

且

$$AQ^{(-1)}(a)A^*=BQ^{(-1)}(b)B^*,$$

即定理 5.4.1 的结论.

注 6 定理 5.5.8 的结论可以推广到定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 n 阶对称微分表达式的自共轭域的描述, 中间有奇点的微分表示式的情形 (使用直和空间理论), 以及微分算子的乘积算子的自共轭域的描述 (参阅 [3] 和 [35]).

§5.6 微分算子的辛结构

5.6.1 辛空间

定义 5.6.1 一个复的辛空间S是一个复的线性空间, 且带有一个辛形式 $[:]$, 即

(1) $[:]$ 是一个半双线性型,

$$u,v\to[u:v],\ S\times S\to\mathbb{C},\ [c_1u+c_2v:w]=c_1[u:w]+c_2[v:w];$$

(2) $[:]$ 是一个反 Hermitian 型,

$$[u:v]=-\overline{[v:u]},\quad [u:c_1v+c_2w]=\overline{c_1}[u:v]+\overline{c_2}[u:w];$$

(3) $[:]$ 是非退化的,

$$[u:S]=0\Rightarrow u=0,$$

对 $\forall u,v,w\in S$, $\forall c_1,c_2\in\mathbb{C}$.

定义 5.6.2 复辛空间 S 的一个线性流形 L 被称为是 Lagrangian 的, 若 $[L:L]=0$, 即对 $\forall u,v\in L$ 有 $[u:v]=0$.

S 的一个 Lagrangian 子流形 L 被称为是完全的, 若 $u\in S$ 且 $[u:L]=0\Rightarrow u\in L$.

定义 5.6.3 设 S 是一个复辛空间, $\dim S=D\geqslant 1$. 令

$$p=\max\{\dim V|V\ \text{是}\ S\ \text{的子空间, 且对于}\ \forall v\in V\text{有}\ \mathrm{Im}[v:v]\geqslant 0\},$$

$$q=\max\{\dim V|V\ \text{是}\ S\ \text{的子空间, 且对于}\ \forall v\in V\text{有}\ \mathrm{Im}[v:v]\leqslant 0\},$$

则称 p,q 为 S 的正, 负指数. 令

$$\triangle=\max\{\dim L|L\ \text{是}\ S\ \text{的 Lagrangian 子空间}\},\ Ex=p-q,$$

则称 $\triangle$ 与 Ex 为 S 的 Lagrangian 指数与超出量. $p,q,\triangle,Ex$ 统称为 S 的辛不变量.

另一方面我们可以研究实的辛空间.

定义 5.6.4 一个实的辛空间 S_R 是一个实的线性空间, 且带有一个实辛形式 $[:]_R$, 即

(1) $[:]_R$ 是一个实的双线性型,

$$u,v\to[u:v]_R,\ S\times S\to\mathbb{R};$$

(2) $[\ :\ ]_R$ 是一个反 symmetric 型,

$$[u:v]_R = -[v:u]_R;$$

(3) $[\ :\ ]_R$ 是非退化的,

$$[u:S]_R = 0 \Rightarrow u = 0,$$

对 $\forall u, v, \in S_R$.

对于实辛空间, 可以考虑它的复化:

设 S_R 为实辛空间, 令

$$S = \{z = x + \mathrm{i}y | x, y \in S_R\},$$

在 S 中定义相应的加法和数乘, 则 S 成为复的线性空间.

进一步在 S 中定义辛内积:

$$[z_1 : z_2] = [x_1 + \mathrm{i}y_1 : x_2 + \mathrm{i}y_2] = [x_1 : x_2]_R + [y_1 : y_2]_R + \mathrm{i}\{[y_1 : x_2]_R + [y_2 : x_1]_R\},$$

则 S 成为一个复辛空间.

定理 5.6.5 设 S 是一个复辛空间, $\dim S = D \geqslant 1$, 则

(1) 存在 S 的一个基, 使得对于 $\forall u, v \in S$ 有

$$[u:v] = uHv^*,$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathrm{i} & & & \\ & & & -\mathrm{i} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

为反 Hermitian 矩阵, 即 $H = -H^*$. 且

$D = p + q$,

$\triangle = \min\{p, q\} = \dfrac{1}{2}(D - |Ex|)$.

(2) S 是实辛空间 $\mathbb{R}^D$ 的复化的充分必要条件是以下条件之一成立:

(i) $D = 2p$;

(ii) $p = q$;

(iii) $Ex = 0$;

(iv) $D = 2\triangle$;

(v) 存在 S 的一个基, 使得对于 $\forall u, v \in S$ 有

$$[u : v] = uKv^*,$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 5.6.6 设 S 是一个复辛空间, 若 S_- 和 S_+ 是 S 的线性子流形, 且满足:

(1) $S = \operatorname{span}\{S_-, S_+\}$;

(2) $[S_- : S_+] = 0$,

则称 S_- 和 S_+ 在 S 中是辛正交互补, 记作 $S = S_- \bigoplus S_+$.

当 $S_- \cap S_+ = 0$ 时, S 是 S_- 与 S_+ 的辛正交直和分解.

推论 5.6.7 设 S 是一个复辛空间, $\dim S = D \geqslant 1$. 则 S 有辛正交直和分解:

$$S = S^{2\triangle} \oplus S^{|Ex|},$$

且满足:

(1) $S^{2\triangle}$ 的维数是 $2\triangle$, 超出量是 0, 辛同构于 $\mathbb{R}^{2\triangle}$ 的复化辛空间;

(2) $S^{|Ex|}$ 的维数是 $|Ex|$, 超出量是 $p-q$, 不含非零中性向量, 即若 $v \in S^{|Ex|}$, $[v, v] = 0 \Rightarrow v = 0$.

推论 5.6.8 设 S 是一个复辛空间, $\dim S = D \geqslant 1$. 若 $S = S_- \bigoplus S_+$, 则

(1) $D = D_- + D_+$;

(2) $p = p_- + p_+$;

(3) $q = q_- + q_+$;

(4) $Ex = Ex_- + Ex_+$;

(5) $\triangle \geqslant \triangle_- + \triangle_+$;

(6) $\triangle = \triangle_- + \triangle_+ \Leftrightarrow (Ex_-)(Ex_+) \geqslant 0$;

(7) 当 $Ex = 0$ 时, $\dim S_- = \dim S_+ \Leftrightarrow \triangle_- = \triangle_+$,

其中 $D_\pm, p_\pm, q_\pm, \triangle_\pm, Ex_\pm$ 是 $S_\pm$ 的维数与辛不变量.

定理 5.6.9 设 S 是一个复辛空间, $\dim S = D \geqslant 1$, 则

(1) S 有完全 Lagrangian 子流形 $\Leftrightarrow Ex = 0$;

(2) 当 $Ex = 0$ 时, $\dim S = D = 2\triangle$, 且 S 的 Lagrangian 子流形 L 是完全的 $\Leftrightarrow \dim L = \triangle$.

存在不完全的 Lagrangian 子流形:

例 5.6.10 当 $D = 3$, 考虑复辛空间 $S = \mathbb{C}^3$, 其辛内积为

$$[e_1 : e_1] = \mathrm{i}, \quad [e_2 : e_2] = \mathrm{i}, \quad [a_1 : a_1] = -\mathrm{i},$$

其他辛内积均为零, 其中

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad a_1 = (0,0,1)$$

是 $\mathbb{C}^3$ 的标准正交基 (这里 $\mathbb{C}^3$ 上的辛内积是用反 Hermite 矩阵 $H = \mathrm{diag}\{\mathrm{i}, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ 来定义的).

定义

$$L = \mathrm{span}\{e_2 + a_1\} = \{(0, c, c)\}, \quad \forall\, c \in \mathbb{C},$$

则 L 是一个 Lagrangian 子空间, 但不是完全的, 因为 $[e_2 : L] = 0$ 但 $e_2 \notin L$.

并且 S 没有完全的 Lagrangian 子流形.

定理 5.6.11 (平衡相交原理) 设 S 是一个复辛空间, $\dim S = D \geqslant 1$. 若 S 有辛正交直和分解:

$$S = S_- \oplus S_+,$$

且 $D = 2\triangle, Ex = 0$, 则对于 S 的任一个完全 Lagrangian 子流形 L 都有

$$0 \leqslant \triangle_- - \mathrm{dim} L \cap S_- = \triangle_+ - \mathrm{dim} L \cap S_+ \leqslant \min\{\triangle_-, \triangle_+\}.$$

定义 5.6.12 设 L 是 S 的一个完全 Lagrangian 子流形, 称

$$\mathrm{grade} L = \triangle_- - \mathrm{dim} L \cap S_- = \triangle_+ - \mathrm{dim} L \cap S_+$$

为 L 的耦合级.

5.6.2 高阶奇型微分算子自共轭域的辛几何刻画

设

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (p_{n-k} y^{(k)})^{(k)}$$

是 $I = [0, \infty)$ 上定义的 $2n$ 阶实系数微分算式, $p_0^{-1}(x), p_{n-k} (k = 0, 1, \cdots, n)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的任何紧子集上可积, $p_0(x)$ 在 I 上恒大于零.

由 $l(y)$ 生成的最大算子与最小算子定义如下:

$$T_{\max}(y) = l(y), y \in \mathfrak{D}(T_{\max}) = \{y \in L^2(I) | y^{[k]} \in AC(I), \\ k = 1, 2, \cdots, 2n-1, y^{[2n]} \in L^2(I)\};$$

$$T_{\min}(y) = l(y), \quad y \in \mathfrak{D}(T_{\min}) = \{y \in \mathfrak{D}(T_{\max}) | y^{[k]}(0) = 0,$$

$$k = 0, 1, \cdots, 2n-1, \text{对任意} z \in \mathfrak{D}(T_{\max}) \text{有} [yz](\infty) = 0\},$$

其中 $[yz]$ 是 y 与 z 关于 $l(y)$ 相应的契合函数, $y^{[k]}$ 是 y 的拟导数, 即

$$y^{[k]} = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$y^{[n]} = p_0 \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},$$

$$y^{[n+k]} = p_k \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{[n+k-1]}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

由前可知, $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 是闭线性算子, 且 $T_{\max}^* = T_{\min}$, $T_{\min}^* = T_{\max}$.

令

$$S = \mathfrak{D}(T_{\max})/\mathfrak{D}(T_{\min}),$$

在 S 中定义辛形式 $[\,:\,]$ 为

$$[\boldsymbol{f} : \boldsymbol{g}] = [f + \mathfrak{D}(T_{\min}) : g + \mathfrak{D}(T_{\min})] = [fg]_0^\infty, \quad \forall f, g \in \mathfrak{D}(T_{\max}), \tag{5.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{f} = f + \mathfrak{D}(T_{\min})$, $\boldsymbol{g} = g + \mathfrak{D}(T_{\min}) \in S$, $[fg]_0^\infty$ 是 f 与 g 的契合式. 若令

$$[fg]_0^\infty = [f : g],$$

则

$$\mathfrak{D}(T_{\min}) = \{f \in \mathfrak{D}(T_{\max}) \big| [f : \mathfrak{D}(T_{\max})] = 0\},$$

$T_{\min}$ 是一个对称算子.

我们可以有如下几个引理:

引理 5.6.13 $S = \mathfrak{D}(T_{\max})/\mathfrak{D}(T_{\min})$ 是一个复辛空间.

引理 5.6.14 $S = S_- \bigoplus S_+$, 其中

$$S_- = \{\boldsymbol{f} \in S |\ \text{对任意} g \in \mathfrak{D}(T_{\max}), [fg](\infty) = 0\},$$

$$S_+ = \{\boldsymbol{f} \in S | f^{[k]}(0) = 0,\ k = 0, 1, \cdots, 2n-1\}.$$

引理 5.6.15 (平衡相交原理) 若 L 是 S 的一个完全 Lagrangian 子流形, 则

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\dim S_- - \dim L \cap S_- = \frac{1}{2}\dim S_+ - \dim L \cap S_+ \leqslant \frac{1}{2}\min\{\dim S_-, \dim S_+\}.$$

定义 5.6.16 设 L 是 S 的一个完全 Lagrangian 子流形, 令

$$k = \frac{1}{2}\dim S_- - \dim L \cap S_- = \frac{1}{2}\dim S_+ - \dim L \cap S_+,$$

则称 L 是 k 级的, 也称 $\mathfrak{D}(T_L)$ 是 k 级的.

定理 5.6.17 (GKN-EM 定理)[45]

(1) $T_{\min}$ 有自共轭扩张 $\Leftrightarrow$ S 有完全 Lagrangian 子流形;

(2) S 的 Lagrangian 子流形 L 是完全的 $\Leftrightarrow$ $\dim L = \dfrac{1}{2}\dim S$;

(3) 若 T 是 $T_{\min}$ 的自共轭扩张, 定义域为 $\mathfrak{D}(T)$, 则 S 有唯一的完全 Lagrangian 子流形 L_T 与其对应, 使得

$$L_T = \mathfrak{D}(T)/\mathfrak{D}(T_{\min});$$

(4) 若 L 是 S 的一个完全 Lagrangian 子流形, 则 $T_{\min}$ 有唯一的自共轭扩张 T_L 与其对应, 使得

$$\mathfrak{D}(T_L) = c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m + \mathfrak{D}(T_{\min}),$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 L 的一个基, $f_1, \cdots, f_m \in \mathfrak{D}(T_{\max})$, $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 是任意复数.

注 由定理 5.6.17 可知, 我们讨论 $T_{\min}$ 的自共轭扩张问题就等价于讨论复辛空间 $S = \mathfrak{D}(T_{\max})/\mathfrak{D}(T_{\min})$ 的完全 Lagrangian 子流形. 因此 S 的完全 Lagrangian 子流形的分类与描述, 就等价于对 $l(y)$ 的自共轭域进行的分类与描述.

(Ⅰ) 极限点型

在 $l(y)$ 为极限点的假设下, 可以有如下几个定理:

定理 5.6.18 $S_+ = S, S_- = \{0\}$.

定理 5.6.19 $\dim S = \dim \mathfrak{D}(T_{\max})/\mathfrak{D}(T_{\min}) = 2n$.

定理 5.6.20 S 只有 0 级完全 Lagrangian 子流形.

证明 由定义 5.6.16 和定理 5.6.18、定理 5.6.19 知定理成立. □

定理 5.6.21 L 是 S 的 (0 级) 完全 Lagrangian 子流形 $\Leftrightarrow \exists a_{ij} \in \mathbb{C}(i = 1, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, 2n)$, 使得

$$\begin{aligned} L =& \text{span}\{a_{11}e^1 + a_{12}e^2 + \cdots + a_{1,2n}e^{2n}, a_{21}e^1 + a_{22}e^2 + \cdots + a_{2,2n}e^{2n}, \cdots, \\ & a_{n1}e^1 + a_{n2}e^2 + \cdots + a_{n,2n}e^{2n}\}, \end{aligned}$$

且满足

(1) 秩 $A = n$;

(2) $\alpha_i H \alpha_j^* = 0, 1 \leqslant i, j \leqslant n$; 其中 $A = (a_{ij})_{n\times 2n}$, $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i,2n})$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(Ⅱ) 极限圆型

在极限圆的情况下, 完全 Lagrangian 子流形不仅仅是 0 级的, 有

定理 5.6.22 S 的完全 Lagrangian 子流形有且仅有 0 级, 1 级, $\cdots$, n 级的.

证明参阅 [51].

注 因为 $\dim S = 4n$, 所以 S 与 $\mathbb{C}^{4n}$ 线性同构. 因此, 我们可以利用 $\mathbb{C}^{4n}$ 的单位基向量

$$e^1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), \quad e^2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad e^{2n} = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{2n}, 0, \cdots, 0),$$

$$f^1 = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{2n+1}, 0, \cdots, 0), \quad f^2 = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{2n+2}, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad f^{2n} = (0, \cdots, 0, 1)$$

来表示 S, 即 $S = \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}, f^1, f^2, \cdots, f^{2n}\}$. 设 $\boldsymbol{f} \in S$, 则可以如下选取 $\boldsymbol{f}$ 的坐标:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= (f(0), f^{[1]}(0), \cdots, f^{[2n-1]}(0), [f\varphi_1](\infty), [f\varphi_2](\infty), \cdots, [f\varphi_{2n}](\infty)) \\ &= f(0)e^1 + f^{[1]}(0)e^2 + \cdots + f^{[2n-1]}(0)e^{2n} \\ &\quad + [f\varphi_1](\infty)f^1 + [f\varphi_2](\infty)f^2 + \cdots + [f\varphi_{2n}](\infty)f^{2n}.\end{aligned} \tag{5.6.2}$$

定理 5.6.23 $S_- = \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}$, $S_+ = \operatorname{span}\{f^1, f^2, \cdots, f^{2n}\}$.

证明 下面证明 $S_- = \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}$.

对于 $\forall \boldsymbol{f} \in S_-$, 则 $\boldsymbol{f} \in S, f \in \mathfrak{D}(T_{\max})$ 且 $[f\varphi_k](\infty) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, 2n-1$. 由 (5.6.1) 有

$$\boldsymbol{f} = f(0)e^1 + f^{[1]}(0)e^2 + \cdots + f^{[2n-1]}(0)e^{2n} \in \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}.$$

故 $S_- \subseteq \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}$.

若 $\boldsymbol{f} \in \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}$, 则 $\boldsymbol{f} = f(0)e^1 + f^{[1]}(0)e^2 + \cdots + f^{[2n-1]}(0)e^{2n}$, 即 $[f\varphi_k](\infty) = 0 (k = 0, 1, \cdots, 2n-1)$. 因此 $\operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\} \subseteq S_-$. 于是 $S_- = \operatorname{span}\{e^1, e^2, \cdots, e^{2n}\}$.

类似可证 $S_+ = \operatorname{span}\{f^1, f^2, \cdots, f^{2n}\}$. □

定理 5.6.24 L 是 S 的 0 级完全 Lagrangian 子流形 $\Leftrightarrow \exists a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, 2n)$, 使得

$$\begin{aligned}L = \operatorname{span}\{&a_{11}e^1 + a_{12}e^2 + \cdots + a_{1,2n}e^{2n}, \cdots, a_{n1}e^1 + a_{n2}e^2 + \cdots + a_{n,2n}e^{2n}, \\ &b_{11}f^1 + b_{12}f^2 + \cdots + b_{1,2n}f^{2n}, \cdots, b_{n1}f^1 + b_{n2}f^2 + \cdots + b_{n,2n}f^{2n}\}\end{aligned}$$

且满足

(1) 秩 $A_n =$ 秩 $B_n = n$;

(2) $\alpha_i H \alpha_j^* = 0, 1 \leqslant i, j \leqslant 2n$, 其中 $A_n = (a_{ij})_{n\times 2n}$, $B_n = (b_{ij})_{n\times 2n}$,

$$\alpha_i = \begin{cases} (a_{i1}, \cdots, a_{i,2n}, 0, \cdots, 0), & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ (0, \cdots, 0, b_{i-n,1}, \cdots, b_{i-n,2n}), & n+1 \leqslant i \leqslant 2n. \end{cases}$$

定理 5.6.25 L 是 S 的 1 级完全 Lagrangian 子流形 $\Leftrightarrow \exists a_{ij}, b_{ij}, c_{kj}, d_{kj} \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1,\ j = 1, 2, \cdots, 2n,\ k = 1, 2)$, 使得

$$
\begin{aligned}
L=\operatorname{span}\{&a_{11}e^1+a_{12}e^2+\cdots+a_{1,2n}e^{2n},\cdots,a_{n-1,1}e^1+a_{n-1,2}e^2+\cdots+a_{n-1,2n}e^{2n},\\
&b_{11}f^1+b_{12}f^2+\cdots+b_{1,2n}f^{2n},\cdots,b_{n-1,1}f^1+b_{n-1,2}f^2+\cdots+b_{n-1,2n}f^{2n},\\
&c_{11}e^1+c_{12}e^2+\cdots+c_{1,2n}e^{2n}+d_{11}f^1+d_{12}f^2+\cdots+d_{1,2n}f^{2n},\\
&c_{21}e^1+c_{22}e^2+\cdots+c_{2,2n}e^{2n}+d_{21}f^1+d_{22}f^2+\cdots+d_{2,2n}f^{2n}\},
\end{aligned}
$$

且满足

(1) 秩 $A_{n+1}=$ 秩 $B_{n+1}=n+1$;

(2) $\alpha_i H\alpha_j^*=0, 1\leqslant i,j\leqslant 2n$,

其中

$$
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,2n}\\
\vdots & & \vdots & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,2n}\\
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,2n}\\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,2n}
\end{pmatrix},\quad
B=\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,2n}\\
d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1,2n}\\
d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2,2n}
\end{pmatrix},
$$

$$
\alpha_i=\begin{cases}
(a_{i1},\cdots,a_{i,2n},0,\cdots,0), & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\
(0,\cdots,0,b_{i-n+1,1},\cdots,b_{i-n+1,2n}), & n\leqslant i\leqslant 2n-2,\\
(c_{i-2n+2,1},\cdots,c_{i-2n+2,2n},d_{i-2n+2,1},\cdots,d_{i-2n+2,2n}), & 2n-1\leqslant i\leqslant 2n.
\end{cases}
$$

定理 5.6.26 L 是 S 的 k 级完全 Lagrangian 子流形 $\Leftrightarrow \exists a_{ij},b_{ij},c_{lj},d_{lj}\in\mathbb{C}$ $(i=1,2,\cdots,n-k,\ j=1,2,\cdots,2n,\ l=1,2,\cdots,2k)$, 使得

$$
\begin{aligned}
L=\operatorname{span}\{&a_{11}e^1+a_{12}e^2+\cdots+a_{1,2n}e^{2n},\cdots,a_{n-k,1}e^1+a_{n-k,2}e^2+\cdots+a_{n-k,2n}e^{2n},\\
&b_{11}f^1+b_{12}f^2+\cdots+b_{1,2n}f^{2n},\cdots,b_{n-k,1}f^1+b_{n-k,2}f^2+\cdots+b_{n-k,,2n}f^{2n},\\
&c_{11}e^1+c_{12}e^2+\cdots+c_{1,2n}e^{2n}+d_{11}f^1+d_{12}f^2+\cdots+d_{1,2n}f^{2n},\cdots,\\
&c_{2k,1}e^1+c_{2k,2}e^2+\cdots+c_{2k,2n}e^{2n}+d_{2k,1}f^1+d_{2k,2}f^2+\cdots+d_{2k,2n}f^{2n}\},
\end{aligned}
$$

且满足

(1) 秩 $A_{n+k}=$ 秩 $B_{n+k}=n+k$;

(2) $\alpha_i H\alpha_j^*=0, 1\leqslant i,j\leqslant 2n$,

其中

$$
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n-k,1} & a_{n-k,2} & \cdots & a_{n-k,2n}\\
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
c_{2k,1} & c_{2k,2} & \cdots & c_{2k,2n}
\end{pmatrix},\quad
B=\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
b_{n-k,1} & b_{n-k,2} & \cdots & b_{n-k,2n}\\
d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1,2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
d_{2k,1} & d_{2k,2} & \cdots & d_{2k,2n}
\end{pmatrix},
$$

$$\alpha_i=\begin{cases}(a_{i1},\cdots,a_{i,2n},0,\cdots,0), & 1\leqslant i\leqslant n-k,\\ (0,\cdots,0,b_{i-n+k,1},\cdots,b_{i-n+k,2n}), & n-k+1\leqslant i\leqslant 2n-k,\\ (c_{i-2n+k,1},\cdots,c_{i-2n+k,2n},d_{i-2n+k,1},\cdots,d_{i-2n+k,2n}), & \\ & 2n-k+1\leqslant i\leqslant 2n.\end{cases}$$

上述定理的证明可参阅 [51] 和 [52].

注 1　从以上讨论可知, S 的完全 Lagrangian 子流形共分为 $n+1$ 类, 都可以用边条件来描述. 但是, 只有 0 级完全 Lagrangian 子流形的边条件是分离的, 其他类的边条件都是耦合的.

注 2　对于两端奇异的微分算子、具有中间亏指数的微分算子, 可以类似地给出其自共轭域的辛几何刻画以及耦合程度的分类.

5.6.3　对称微分算子耗散扩张的辛几何刻画

复辛空间理论对线性微分算子的边值问题、特别是自共轭扩张的研究提供了重要的几何方法, 著名的 GKN-EM 定理建立了二者之间的联系. 这一节我们用辛几何的方法来研究对称算子的耗散扩张问题, 建立相应的 GKN-EM 定理.

定义 5.6.27　称 Hilbert 空间 H 中的稠定线性算子 T_D 是耗散算子 (dissipative operators), 若

$$\operatorname{Im}(T_Dx,x)\geqslant 0,\quad \forall\, x\in\mathfrak{D}(T_D). \tag{5.6.3}$$

称 Hilbert 空间 H 中的稠定线性算子 T_A 是累聚算子 (或称增生算子) (accretive operators), 若

$$\operatorname{Im}(T_Ax,x)\leqslant 0,\quad \forall\, x\in\mathfrak{D}(T_A). \tag{5.6.4}$$

定义 5.6.28　称一个耗散算子 T_D 是最大耗散 (maximal dissipative) 算子, 若它没有非奇异 (即不同于 T_D 自身) 的耗散扩张.

称一个累聚算子 T_A 是最大累聚 (maximal accretive) 算子, 若它没有非奇异 (即不同于 T_A 自身) 的累聚扩张.

注 1　对称算子 T 满足: $\forall x\in\mathfrak{D}(T)$, (Tx,x) 是实的, 所以对称算子既是耗散算子又是累聚算子.

注 2　如果 (5.6.3) 中的 $\geqslant 0$ 改为 >0, 则称 T_D 为严格耗散 (strictly dissipative) 算子; (5.6.4) 中的 $\leqslant 0$ 改为 <0, 则称 T_A 为严格累聚 (strictly accretive) 算子.

相应的, 我们可以建立复辛空间耗散、累聚子空间及相关概念.

定义 5.6.29　复辛空间 S 的线性子空间 D 被称为是耗散的, 若

$$\operatorname{Im}[u:u]\geqslant 0,\quad \forall\, u\in D. \tag{5.6.5}$$

复辛空间 S 的线性子空间 A 被称为是累聚的, 若

$$\operatorname{Im}[u:u] \leqslant 0, \quad \forall\, u \in A. \tag{5.6.6}$$

定义 5.6.30 称耗散子空间 $D \subset S$ 是最大的, 若对任意的耗散子空间 $D^* \subset S$ 满足 $D \subseteq D^*$, 都有 $D = D^*$.

称累聚子空间 $A \subset S$ 是最大的, 若对任意的累聚子空间 $A^* \subset S$ 满足 $A \subseteq A^*$, 都有 $A = A^*$.

注 1 如果 (5.6.5) 中的 $\geqslant 0$ 改为 > 0, 则称 D 为严格耗散 (strictly dissipative) 的; (5.6.6) 中的 $\leqslant 0$ 改为 < 0, 则称 A 为严格累聚 (strictly accretive) 的.

注 2 Lagrangian 子空间既是耗散子空间又是累聚子空间.

注 3 复辛空间 S 的线性子空间不一定为复辛空间, 因为由 S 诱导的辛形式可以是退化的. 例如, Lagrangian 子空间和不是严格耗散的耗散子空间都是预–复辛空间, 不是复辛空间; 而严格耗散子空间是复辛空间.

下面考虑由拟导数定义的微分方程

$$My = (-1)^k y^{[n]} = \lambda w y, \quad t \in J = (a, b), -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty, \tag{5.6.7}$$

关于拟导数定义的微分算式可参阅 5.6.2 节和 [34]. 类似 (5.6.1) 定义与微分算式相关的辛形式. 令

$$S = \mathfrak{D}(T_{\max})/\mathfrak{D}(T_{\min}),$$

在 S 中定义辛形式 $[:]$ 为

$$[\boldsymbol{f} : \boldsymbol{g}] = [f + \mathfrak{D}(T_{\min}) : g + \mathfrak{D}(T_{\min})] = [fg]_0^{\infty}, \quad \forall f, g \in \mathfrak{D}(T_{\max}), \tag{5.6.8}$$

其中 $\boldsymbol{f} = f + \mathfrak{D}(T_{\min})$, $\boldsymbol{g} = g + \mathfrak{D}(T_{\min}) \in S$, $[fg]_0^{\infty}$ 是 f 与 g 的契合式.

定理 5.6.31 设对称微分算式 M 由 (5.6.7) 给出, 亏指数为 d^+, d^-, 则

(1) 方程 (5.6.7) 存在 d^+ 个属于 $\mathcal{N}(M_{\max} - \mathrm{i})$ 的线性无关解 $\{u_i\}$ 满足

$$(u_i, u_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, d^+.$$

(2) 方程 (5.6.7) 存在 d^- 个属于 $\mathcal{N}(M_{\max} + \mathrm{i})$ 的线性无关解 $\{v_j\}$ 满足

$$(v_i, v_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, d^-.$$

(3) $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ 满足

$$(u_i, v_j) = 0, \quad i = 1, \cdots, d^+, j = 1, \cdots, d^-.$$

证明　由于 $\mathcal{N}(M_{\max}+\mathrm{i})\dot{+}\mathcal{N}(M_{\max}-\mathrm{i})$ 是 H 的 (d^-+d^+) 维子空间, 由 Hilbert 空间理论 $\mathcal{N}(M_{\max}+\mathrm{i})\dot{+}\mathcal{N}(M_{\max}-\mathrm{i})$ 存在标准正交基

$$\dot{u_1}, \dot{u_2}, \cdots, \dot{u_{d^+}}, \dot{v_1}, \dot{v_2}, \cdots, \dot{v_{d^-}}$$

其中

$$\dot{u_1}, \dot{u_2}, \cdots, \dot{u_{d^+}} \in \mathcal{N}(M_{\max}-\mathrm{i}), \quad \dot{v_1}, \dot{v_2}, \cdots, \dot{v_{d^-}} \in \mathcal{N}(M_{\max}+\mathrm{i}).$$

令

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{u_i}, v_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{v_j}, \quad i=1,2,\cdots,d^+, j=1,2,\cdots,d^-,$$

则易见 $u_1, u_2, \cdots, u_{d^+}, v_1, v_2, \cdots, v_{d^-}$ 满足 (1), (2), (3). □

通过简单的计算, 我们有:

推论 5.6.32　设定理 5.6.31 中记号和假设成立. 则

$$([u_i : u_j])_{d^+\times d^+} = \mathrm{i}I_{d^+}, \quad ([v_i : v_j])_{d^-\times d^-} = -\mathrm{i}I_{d^-}. \tag{5.6.9}$$

这里 I_{d^+}, I_{d^-} 是单位矩阵, 辛形式 $[\,:\,]$ 由 (5.6.8) 所定义.

定理 5.6.33　设定理 5.6.31 中的记号和假设成立, $S=\mathfrak{D}_{\max}/\mathfrak{D}_{\min}$ 是由 M 生成的复辛空间. 则

(1) $S=\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{d^+},\ \boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{d^-}\}$;

(2) 对 S 的一组基$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{d^+},\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{d^-}\}$, 相应的反 Hermitian 矩阵如下:

$$H=\begin{pmatrix} \mathrm{i}I_{d^+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}I_{d^-}\end{pmatrix}; \tag{5.6.10}$$

(3) S是实辛空间 $\mathbb{R}^{d^++d^-}$ 的复化当且仅当 $d^+=d^-$;

(4) S 是与反 Hermitian 矩阵 H (5.6.10) 定义辛内积的复辛空间 $\mathbb{C}^{d^++d^-}$ 辛同构.

证明　由 von Neumann 公式和定理 5.6.31 第 (1) 条结论成立; 下面证明第 (2) 条结论. 注意到 $\forall u_j \in \mathcal{N}(M_{\max}-\mathrm{i}), v_k \in \mathcal{N}(M_{\max}+\mathrm{i})$,

$$[u_j : v_k] = \int_a^b \bar{v}_k M u_j - u_j\overline{Mv_k} = \int_a^b \bar{v}_k(\mathrm{i}u_j) - u_j\overline{(-\mathrm{i}v_k)} = 0.$$

结合推论 5.6.32 中结果

$$([u_i : u_j])_{d^+\times d^+} = \mathrm{i}I_{d^+}, \quad ([v_i : v_j])_{d^-\times d^-} = -\mathrm{i}I_{d^-},$$

得到相应的反 Hermitian 矩阵为

$$H=\begin{pmatrix} \mathrm{i}I_{d^+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}I_{d^-}\end{pmatrix}.$$

由定理 5.6.5, 第 (3) 条成立. 由文献 [45] 中例 1, 第 (4) 条结论成立. □

定理 5.6.34 设 $S=\mathfrak{D}_{\max}/\mathfrak{D}_{\min}$ 是由对称微分算式 M 生成的复辛空间. 令

$$S_+=\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_{d+}\},$$
$$S_-=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_{d-}\},$$

则

(1) $S=S_+\dotplus S_-$, $[S_+:S_-]=0$;

(2) S_+ 是一个最大耗散子空间, 并且是严格的耗散子空间;

(3) S_- 是一个最大累聚子空间, 并且是严格的累聚子空间.

证明 由定理 5.6.33, 显然有 $S=\operatorname{span}\{S_+,S_-\}$ 和 $[S_+:S_-]=0$, 即第 (1) 条结论成立. 由推论 5.6.32

$$[\boldsymbol{u}_i:\boldsymbol{u}_j]=[u_i:u_j]=2\mathrm{i}(u_i,u_j)=\mathrm{i}\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,p,$$

即

$$\operatorname{Im}[\boldsymbol{u}_i:\boldsymbol{u}_j]\geqslant 0,\quad \operatorname{Im}[\boldsymbol{u}_i:\boldsymbol{u}_i]>0.$$

所以由定义 5.6.27 及其后的注 2 知 S_+ 是耗散子空间, 并且是严格的.

同理, S_- 是累聚子空间, 并且是严格的.

下面证明 S_+ 是一个最大耗散子空间. 假设 S_+ 有如下非奇异耗散扩张

$$S_+^*=S_+\dotplus\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}\},\quad \boldsymbol{u}\in S,\ \boldsymbol{u}\notin S_+,$$

则有 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_++\boldsymbol{u}_-$, $\boldsymbol{u}_+\in S_+$, $\boldsymbol{u}_-\in S_-$ 和 $\boldsymbol{u}_-\neq 0$.

注意到 $\boldsymbol{u}_-\in S_+^*$ 但是

$$\operatorname{Im}[\boldsymbol{u}_-:\boldsymbol{u}_-]<0.$$

这与 S_+^* 是耗散子空间的假设矛盾. 即 S_+ 是最大耗散子空间.

同理可证, S_- 是最大累聚子空间. □

从辛几何的角度研究对称微分算子的耗散扩张问题, 我们可以建立耗散扩张与耗散子空间的一一对应.

定理 5.6.35 设 M 是对称微分算式, S 是由 M 生成的复辛空间. 并设定理 5.6.31 和定理 5.6.33 中的记号和假设成立. 则由 $M_{\min}$ 的所有严格耗散扩张构成的集合 $\{T_{sD}\}$ 与由 S 的所有严格耗散子空间构成的集合 $\{D_s\}$ 之间存在一一对应.

证明 取 $T_{sD}\leftrightarrow D_s$ 的双射

$$\Psi:\{D_s\}\to\{T_{sD}\},\tag{5.6.11}$$

这里 Ψ 由自然映射定义

$$\tilde{\Psi}: \mathfrak{D}_{\max} \to S, \tag{5.6.12}$$

即

$$\tilde{\Psi} D(T_{sD}) = D_s, \text{ 且 } D(T_{sD}) = \tilde{\Psi}^{-1} D_s. \tag{5.6.13}$$

任取 r 维严格耗散子空间 $D_s \in \{D_s\}$, 并取 D_s, 的一组基, 记为

$$\boldsymbol{u}_{j1}, \boldsymbol{u}_{j2}, \cdots, \boldsymbol{u}_{jr},$$

这里 $\boldsymbol{u}_{jk} = \tilde{\Psi} u_{jk},\ u_{jk} \in \mathfrak{D}_{max},\ k = 1, 2, \cdots, r$. 令 $\mathfrak{D}_s \subset L^2(J, w)$ 如下:

$$\mathfrak{D}_s :\equiv \mathfrak{D}_{\min} \dotplus \operatorname{span}\{u_{j1}, u_{j2}, \cdots, u_{jr}\}, \tag{5.6.14}$$

则 $\mathfrak{D}_s$ 是耗散算子 $T_{sD} = M_{\max}|_{\mathfrak{D}_s}$ 的定义域. 事实上, 对任意的

$$\varphi + u \in \mathfrak{D}_{\min} \dotplus \operatorname{span}\{u_{j1}, u_{j2}, \cdots, u_{jr}\},$$

这里 $\varphi \in \mathfrak{D}_{\min},\ u \in \operatorname{span}\{u_{j1}, u_{j2}, \cdots, u_{jr}\}$. 由于微分算式 M 是对称的, 最小算子 $M_{\min}$ 是对称的, 有

$$\begin{aligned}
(T_{sD}(\varphi + u), \varphi + u) &= (T_{sD}\varphi + T_{sD}u, \varphi + u) \\
&= (T_{sD}\varphi, \varphi) + (T_{sD}u, u) + (T_{sD}\varphi, u) + (T_{sD}u, \varphi) \\
&= (M_{\min}\varphi, \varphi) + (M_{\max}u, u) + (M_{\min}\varphi, u) + (M_{\max}u, \varphi),
\end{aligned}$$

注意到 $(M_{\min}\varphi, u) = (\varphi, M_{\max}u) = \overline{(M_{\max}u, \varphi)}$, 故 $\operatorname{Im}[(M_{\min}\varphi, u) + (M_{\max}u, \varphi)] = 0$, 结合 $\operatorname{Im}(M_{\min}\varphi, \varphi) = 0, \operatorname{Im}(M_{\max}u, u) > 0$, 得到

$$\operatorname{Im}(T_{sD}(\varphi + u), \varphi + u) = (u, u) > 0.$$

所以 $T_{sD} = M_{\max}|_{D_s}$ 是 $M_{\min}$ 的一个严格耗散扩张.

下面证明由式 (5.6.11) 定义的映射 Ψ 是单射. 设 D_{s1} 和 D_{s2} 是 S 的两个不同的 r 维耗散子空间. 不妨设 $\boldsymbol{u}_0 \in D_{s1}$ 但 $\boldsymbol{u}_0 \notin D_{s2}$, 则存在函数 $u_0 \in \mathfrak{D}_{\max}$ 使得 $\Psi u_0 = \boldsymbol{u_0}$, 从而 $u_0 \in \Psi^{-1} D_{s1} = \mathfrak{D}_{s1}$. 但 $u_0 \notin \Psi^{-1} D_{s2}$, 即 $u_0 \notin \mathfrak{D}_{s2}$. 所以 $\mathfrak{D}_{s1} \neq \mathfrak{D}_{s2}$, 这说明了 Ψ 是单射. 另一方面, 由

$$\operatorname{Im}[\boldsymbol{f} : \boldsymbol{f}] = \operatorname{Im}[(Mf, f) - (f, Mf)] = 2\operatorname{Im}(Mf, f), \tag{5.6.15}$$

得到 Ψ 是满射.

综上, 映射 Ψ 是 $\{T_{sD}\}$ 到 $\{D_s\}$ 上的一一对应. □

注　类似我们可以有：由 $M_{\min}$ 的所有耗散扩张构成的集合 $\{T_D\}$ 与由 S 的所有耗散子空间构成的集合 $\{D\}$ 之间存在一一对应.

第六章　常微分算子的谱分析

§6.1　数学物理中的微分算子和 Schrödinger 算子

微分算子理论给微分方程、经典物理学、现代物理学中的许多问题提供了统一的理论框架. 下面具体看几个在数学物理中的问题.

例 6.1.1　经典的 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ U_1(y) = a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0, \\ U_2(y) = a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

其中 $x \in [a,b](-\infty < a < b < +\infty)$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, 当 $p(x) \in C'[a,b], 1/p(x), q(x) \in L[a,b]$ 时, 利用微分方程的常数变易法以及分析的方法可以解决上述 Sturm-Liouville 边值问题; 但当区间端点 a, b 中至少有一个是奇异点时, 利用以上方法难以解决上述奇异问题.

例 6.1.2　物理学中粒子的状态用 $\varphi(x,\lambda)$ 表示, 其总能量为动能与势能的和, 即

$$E\varphi(x,\lambda) = H\varphi(x,\lambda) = (T+V)\varphi(x,\lambda), \tag{6.1.2}$$

其中 H 表示 Hamilton 算符, 动能算符 $T = L^2/2m$, L 表示质量为 m 粒子的动量算符, V 表示势能函数; 在一维的情形下 Hamilton 算符为

$$H = -\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x). \tag{6.1.3}$$

例 6.1.3　在量子力学中, 量子力学的基本方程是 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t), \tag{6.1.4}$$

其中 H 是 Hamilton 算子 $-\dfrac{m}{2}\Delta + V(x)$, h 是 Plank 常数, $\psi(x,t)$ 是波函数, 而且是归一的. 通过分离变量, Schrödinger 方程求解问题转化为如下的特征问题:

$$\left(-\frac{m}{2}\Delta + V(x)\right)\psi = E\psi. \tag{6.1.5}$$

赋予适当的边界条件, 上述问题就是自共轭微分算子的特征值和特征函数问题.

在这几个例子中, 不考虑其具体的物理意义, 一维的情况下抽象为数学问题, 就是一维线性微分方程的边值问题, 即微分算式赋予边界条件形成的微分算子, 上述问题就是微分算子的特征值和特征函数问题.

可以看出, 不论在物理学中, 还是在数学理论中, 一维线性微分方程边值问题都具有深刻的应用背景. 事实上, 微分算子理论是解决量子力学问题的基本工具, 量子力学的迅速发展也极大地推动了微分算子理论的研究. 在核物理学、电子学, 以及许多其他数学分支中, 微分算子理论也起到了重要的作用. 经历了一个世纪, 其理论成果层出不穷, 硕果累累, 自共轭微分算子的理论体系也日趋完善.

常微分算子谱理论的研究主要围绕谱的定性、定量分析两个方面进行, 研究方法大体分为分析法和算子法. 这两种方法起源可追溯到经典的在有限区间上 Sturm-Liouville 问题的研究, 即 Liouville 的渐近估计方法和 Courant 的变分方法.

分析方法是根据解析函数理论分析预解式, Green 函数和常微方程解的渐近性质来判断微分算子谱的性质. 这方面工作以 E. C. Titchmarsh 和 B. M. Levitain 为代表, 在他们的经典著作中, 我们可以看到, 在谱的定性分析中这种硬分析的方法表现出的高度技巧性和工作的艰巨性. 即使对于高阶的微分算子, 分析方法也是很奏效的. 20 世纪四五十年代, 苏联的数学家 M. A. Naimark, I. M. Glazman, V. B. Lidskii 和 B. M. Levitan 等, 采用分析方法得到许多令人振奋的结论, 大大地推动了微分算子谱理论研究的迅速发展, 尤其在高阶微分算子领域里, 谱理论研究成果大量涌现出来, 这些成果不仅使数学工作者感到兴奋, 而且这些成果应用到现代物理学中也令物理工作者深感兴趣.

用算子理论的方法研究微分算子谱, 是近几十年来广泛采用的方法, 由于它在某种程度上接近于数学物理中的直接方法, 因此也称为微分算子谱的定性分析的直接方法. 在 M. A Naimark, I. M. Glazman, E. Müller-Pfeiffer, D. E. Edmunds 和 W. D. Evans 关于微分算子谱分析的专著里使用的都是线性算子的方法. 这种方法的理论基础是 Hilbert 空间中闭线性算子的谱理论和全连续摄动的相关理论参阅 ([23]、[11]、[21] 及 [9]), 其主要出发点有两个: 一是分解的方法; 另一是二次型比较的方法, 这些目前为人熟知的方法是近几十年来由 R. Courant, F. Rellich, K. O. Friedrichs, I. M. Glazman 创立并在以后逐步完善起来的; D. E. Edmunds 和 W. D. Evans 在其专著 [9] 中介绍的利用算子的近似数、s 数及空间嵌入算子连续性、紧性来研究微分算子的谱也是一种行之有效的办法. 近些年来, 我们与 D. E. Edmunds, A.Kufuer, E. Müller-Pfeiffer 合作, 利用算子的近似数、嵌入数来刻画算子谱的分布和性质[41~44],利用空间嵌入算子连续性, 紧性的刻画来研究奇异微分算子的谱及加权微分算子的谱, 得到了一些很有价值的结果 (参阅 [48] [49]).

人们在研究自共轭微分算子的同时, 也注意到了一类特殊的非自共轭微分算子—— J 自共轭微分算子, 即当 Sturm-Liouville 微分算子的系数 $p(x), q(x)(x \in (a,$

$b)$) 为实函数时, 赋予自共轭边界条件生成的算子是自共轭微分算子, 而当系数 $p(x)$, $q(x)$ $(x \in (a,b))$ 为复函数时, 而且 $\mathrm{Im}p(x)$, $\mathrm{Im}q(x)$ 至少有一个不恒等于零, 赋予自共轭边界条件生成的算子是 J 自共轭微分算子. Glazman 引入了 J 对称, J 自共轭概念, 开始了复系数 Sturm-Liouville 问题的研究. 随后 A. R. Simes 等许多数学工作者利用 Weyl 的方法研究了复系数 Sturm-Liouville 问题 (J 对称 Sturm-Liouville 问题), 得到了完全不同于实系数 Sturm-Liouville 问题 (对称 Sturm-Liouville 问题) 的一些结论.

本章主要研究微分算式

$$\tau u(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_k(x) u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad x \in (a, \infty) \tag{6.1.6}$$

生成的微分算子的谱, 其中 $p_k(x)$ 是定义在 (a,∞) 上的函数.

§6.2 自共轭微分算子的谱

本节主要讨论微分算式 (6.1.6) 中当 $p_k(x) = a_k(x)(x \in (a,\infty))$ 为实值函数时所生成的微分算子的谱. 由第五章讨论可知, 在微分算式 (6.1.6) 中, 如果系数是定义在 (a,∞) 的实值函数, 则微分算式 (6.1.6) 是对称微分算式, 其共轭算式为

$$\tau^* u(x) = \tau u(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (a_k(x) u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad x \in (a, \infty). \tag{6.2.1}$$

为便于讨论, 对 (6.2.1) 中的系数特作如下假设:

(1) $a_n(x) > 0, x \in (a,\infty)$;

(2) $a_k(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}^k(a,\infty)(k = 0,1,2,\cdots,n)$.

条件 (2) 说明对于 $\forall x_1, x_2 \in (a,\infty)$, $a_k(x) \in W_2^k(x_1,x_2)(k = 0,1,2,\cdots,n)$, 根据 Sobolev 空间嵌入定理有 $a_k(x) \in C^{k-1}[x_1,x_2]$.

用 A_0 表示由 (6.2.1) 生成的微分算子

$$A_0 u = \tau(u), \quad u \in \mathfrak{D}(A_0) = C_0^\infty(a,\infty). \tag{6.2.2}$$

6.2.1 A_0 的共轭算子

根据第五章讨论可知: A_0 的共轭算子是微分算式 (6.2.1) 生成的最大算子 A_1, 即

定理 6.2.1　A_0 的共轭算子 $A_0^* = A_1$,

$$A_0^* u = A_1 u = \tau(u),$$

$\mathfrak{D}(A_0^*) = \mathfrak{D}(A_1) = \{u | u \in W_{2,\mathrm{loc}}^{2n}(a,\infty) \cap L^2(a,\infty), \tau(u) \in L^2(a,\infty)\}$, 而且 $A_0 \subset A_1, A_0$ 是一个对称微分算子; 并且 A_0 的闭包生成的最小算子具有相同的有限亏指数.

定理 6.2.2　由 (6.2.2) 定义的对称微分算子 A_0 的所有自共轭扩张具有相同的本质谱 (见定理 4.5.16).

6.2.2　常系数自共轭微分算子及其相关摄动下的本质谱

在微分算式 (6.2.1) 中, 如果对任意的 $x \in (0,\infty)(a=0)$, 系数 $a_k(x) = a_k(k = 0,1,2,\cdots,n)$ 都为常值实数, 则由微分算式 (6.2.1) 所生成的微分算子 A_0 是一个常系数微分算子, 下面的定理给出了其本质谱的范围:

定理 6.2.3　在 (6.2.1) 中, 若系数 $a_k(x)$ 都是常数, 即 $a_k(x) = a_k$, 且 $a_n > 0$, 则由 (6.2.1) 生成的算子 A_0 是下半有界的、本质自共轭的对称算子, 其任何自伴扩张的本质谱相同, 而且等于集合 $A \subset \mathbb{R}$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) = A = [\Lambda, \infty), \tag{6.2.3}$$

其中

$$\Lambda = \inf_{0<\xi<\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^{2k}. \tag{6.2.4}$$

证明　由定理 6.2.2 知: A_0 的所有自共轭扩张的本质谱相同, 等于算子 A_0 的本质谱 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)$. 对 $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, 作 Fourier 变换,

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Fourier 变换在 $L_2(-\infty, \infty)$ 上等距同构, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

且

$$(-\mathrm{i})^k \hat{\varphi}^{(k)}(\xi) = \zeta^k \hat{\varphi}(\xi).$$

对 $y(x) \in \mathfrak{D}(A_0)$, 定义 $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} y(x), & x \in (0,\infty), \\ 0, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$(A_0u,u)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}a_ku^{(2k)}(x)\overline{u}(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}a_k|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$\begin{aligned}(A_0y,y)&=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}a_k|\hat{u}^{(k)}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}a_k\xi^{2k}|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}\right)|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即 $(A_0y,y)\geqslant\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$, 其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}$. 由于 Fourier 变换在 $L_2(-\infty,\infty)$ 上等距, 我们有对于任意的 $y(x)\in\mathfrak{D}(A_0)$, 下式成立:

$$(A_0y,y)\geqslant\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x=\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|y(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

所以算子 A_0 的本质谱包含在集合 A 内, $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)\subset A=[\Lambda,\infty)$.

下面证明区间 $[\Lambda,\infty)$ 内的任意点都属于微分算子 A_0 的本质谱 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)$, 即对于任意 $\lambda\in[\Lambda,\infty)$ 建立 Weyl 序列. 任意 $\lambda\in[\Lambda,\infty)$, 存在 ξ 使得

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}=\lambda. \tag{6.2.5}$$

假设 $I_m=\{x|x-x_m|<l_m\}(m=1,2,\cdots)$ 是包含在 $(0,\infty)$ 内互不相交的区间列, 满足 $l_m\to\infty(m\to\infty)$. 对函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & |x|>\dfrac{1}{2},\\[2mm] 1, & |x|\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

以半径为 $\frac{1}{2}$ 的范围内进行光滑化, 得到函数 $\eta(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$, 且 $\eta(x)$ 的支集包含在区间 $[-1,1]$ 内, $\|\eta(x)\|=1$. 定义函数列

$$u_m(x)=l_m^{\frac{1}{2}}\eta((x-x_m)l_m^{-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-x_m)},\quad m=1,2,\cdots,$$

则函数列 $\{u_m(x)\}$ 具有如下性质:

$$(u_m,u_{m'})=\begin{cases}0, & m\neq m',\\ 1, & m=m'.\end{cases}$$

根据 (6.2.5) 并作简单的计算便得到, 函数列 $\{u_m(x)\}$ 是 $\lambda\in[\Lambda,\infty)$ 对应于微分算子 A_0 的 Weyl 序列, 所以 $[\Lambda,\infty)\subset\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)$. □

当定义区间为 $(-\infty,\infty)$(即 $a=-\infty$) 时, 结论也正确, 即由 $A_0'u=\tau(u)$, $u\in\mathfrak{D}(A_0')=C_0^\infty(-\infty,\infty)$ 生成的算子 A_0' 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张的本质谱相同, 而且等于 A_0' 的本质谱 $\sigma_e(A_0')=[\Lambda,\infty)$.

对于一般高阶对称微分算子所生成自共轭微分算子本质谱的定量定性研究比较困难, 我们首先考虑常系数微分算式在 Birman 相关摄动、相关紧摄动下所生成的自共轭微分算子的本质谱.

引理 6.2.4 假设 A_0 和 B_0 是两个定义在 Hilbert 空间 H 上正定算子 $\mathfrak{D}(A_0)=\mathfrak{D}(B_0)$, 并且

(1) $\|u\|^2\leqslant(B_0u,u)\leqslant c(A_0u,u), u\in\mathfrak{D}(B_0)$, 其中 c 是正的常数;

用 A 和 B、H_{A_0} 和 H_{B_0} 分别表示算子 A_0 和 B_0 的 Friedrichs 扩张和能量空间, 假设 $\mathfrak{D}(B)\subseteq H_{A_0}$. 对于算子 $S_0=A_0-B_0$, 如果存在一个二次型 $s[u,v],\mathfrak{D}(s)=H_{A_0}$ 具有如下特性:

(2) 对于任意的 $u\in\mathfrak{D}(s),u\neq 0,s[u,u]>0$;

(3) 对于任意的 $u\in\mathfrak{D}(s)$, 存在 $C>0$, 使得 $s[u,u]\leqslant C\|u\|_{A_0}^2$,

$$|(S_0u,u)|\leqslant s[u,u],\quad \forall u\in\mathfrak{D}(S_0),$$

并且 H 内的有界集 M 在算子 B^{-1} 下的像集合 $B^{-1}M$ 在范数 $s^{\frac{1}{2}}[u,u]$ 下是预紧的, 则

$$\sigma_e(A)=\sigma_e(B). \tag{6.2.6}$$

证明 由条件 (2) 和 (3) 可知, S_0 在空间 H_{A_0} 上是有界的, 且在空间 H_{A_0} 上存在一个自共轭算子 T , 使得对 $\forall u\in\mathfrak{D}(B_0),v\in H_{A_0}$, 有

$$(S_0u,v)=(AA^{-1}S_0u,v)=[A^{-1}S_0u,v]_{A_0}=[Tu,v]_{A_0},$$

即 $(Au,v)-(Bu,v)=[Tu,v]_{A_0}$,

$$[u,v]_{A_0}-[u,v]_{B_0}=[Tu,v]_{A_0}.$$

由引理条件有, 在范数 $\|\cdot\|_{A_0}$ 下收敛可推出在范数 $\|\cdot\|_{B_0}$ 下收敛, 及算子 T 和 $s[\cdot,\cdot]$ 是连续的, 所以 $u\in\mathfrak{D}(B_0)$ 可以扩展到 H_{A_0} 上, 即对于 $u,v\in H_{A_0}$, 等式

$$[u,v]_{A_0}-[u,v]_{B_0}=[Tu,v]_{A_0}$$

成立.

对于 $\forall h\in H$, 若 $B\varphi=h, A\psi=h$, 则 $\psi\in H_{A_0}$ 和 $\varphi\in\mathfrak{D}(B)\subseteq H_{A_0}$, 而且对 $\forall v\in H_B$, 有

$$[\varphi,v]_{B_0}=(B\varphi,v)=(A\psi,v)=[\psi,v]_{A_0}.$$

令 $u=\varphi$, 则

$$[\varphi,v]_{A_0}-[\psi,v]_{A_0}=[(B^{-1}-A^{-1})h,v]_{A_0}=[TB^{-1}h,v]_{A_0}.$$

因此 $TB^{-1}h=(B^{-1}-A^{-1})h, h\in H$.

下面只需证明 TB^{-1} 在空间 H 上是一个紧算子, 从而 $B^{-1}-A^{-1}$ 是紧算子. 根据 Weyl 定理得 A^{-1} 与 B^{-1} 具有相同的本质谱, 即 $\sigma_{\rm e}(A)=\sigma_{\rm e}(B)$.

若 $u,w\in\mathfrak{D}(S_0)$,

$$(S_0u,w)+(S_0w,u)=\frac{1}{2}[(S_0(u+w),u+w)-(S_0(u-w),u-w)],$$

则

$$|(S_0u,w)+(S_0w,u)|\leqslant\frac{1}{2}\big(s[(u+w),u+w]+s[(u-w),u-w]\big)=s[u,w]+s[w,u].$$

假设 $s[u,u]=1,\ s[w,w]=1,\ w={\rm e}^{{\rm i}\alpha}v,\ \alpha$ 满足如下等式:

$$(S_0u,v)=|(S_0u,v)|{\rm e}^{{\rm i}\alpha},\quad (S_0u,v)\neq 0,$$

所以 $|(S_0u,v)|\leqslant 1$; 如果 $s[u,u]>0,\ s[w,w]>0$, 再根据条件 (3) 得

$$|(S_0u,v)|^2\leqslant s[u,u]s[v,v],\quad \forall u\in\mathfrak{D}(S_0),v\in H_{A_0}.$$

在上面不等式中令 $v=A^{-1}S_0u$ 及条件 (2) 有

$$(Av,v)\leqslant s[u,u]s[v,v]\leqslant Cs[u,u](Av,v),$$

又因为 $A^{-1}S_0u=Tu,\ u\in\mathfrak{D}(S_0)$, 所以

$$[v,v]_{A_0}\leqslant Cs[u,u],\quad v=Tu,u\in\mathfrak{D}(S_0).$$

而算子 T 和 $s[\cdot,\cdot]$ 在空间 H_{A_0} 上是连续的, 则有

$$[v,v]_{A_0}\leqslant Cs[u,u],\quad v=Tu,u\in H_{A_0}.$$

设 M 是空间 H 内的有界集, 根据引理的假设 $B^{-1}M$ 是预紧的, 则集合

$$\{v|v=Tu=TB^{-1}h,h\in M\}$$

是空间 H_{A_0} 内的预紧集, 所以 $TB^{-1}M$ 也是空间 H 内的预紧集, 故

$$TB^{-1}=B^{-1}-A^{-1}$$

是紧算子. □

我们考虑空间 $\dot{C}^l(x_1,x_2)$,

$$\dot{C}^l(x_1,x_2)=\{u(x)\in C^l(x_1,x_2),\|u\|_{\dot{C}^l(x_1,x_2)}<\infty\},$$

$$\|u\|_{\dot{C}^l(x_1,x_2)}=\sum_{k=0}^{l}\sup_{x_1<x<x_2}|u^{(k)}(x)|,$$

$$C_p^l(x_1,x_2)=\{u(x)\in C^l(x_1,x_2),\|u\|_{W_p^l(x_1,x_2)}<\infty\},$$

$$\|u\|_{W_p^l(x_1,x_2)}=\left(\sum_{k=0}^{l}\int_{x_1}^{x_2}|u^{(k)}(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Banach 空间 $W_p^l(x_1,x_2)$ 是空间 $C_p^l(x_1,x_2)$ 在范数 $\|\cdot\|_{W_p^l(x_1,x_2)}$ 下的完备化. 我们可有如下引理 (参阅 [21]).

引理 6.2.5 若 $l>k\geqslant 0$, $1<p<\infty$, 则空间 $W_p^l(x_1,x_2)$ $(-\infty\leqslant x_1<x_2\leqslant+\infty)$ 连续嵌入空间 $C^k(x_1,x_2)$ 中, 而且对 $\varepsilon>0$, 存在常数 C_ε, 使得

$$\|u\|_{C^l(x_1,x_2)}\leqslant\varepsilon\|u^{(l)}\|_{L^p(x_1,x_2)}+C_\varepsilon\|u\|_{L^p(x_1,x_2)}\tag{6.2.7}$$

对所有的 $u(x)\in W_p^l(x_1,x_2)$ 成立. 若 (x_1,x_2) 是有限区间, 由空间 $W_p^l(x_1,x_2)$ 到空间 $C^k(x_1,x_2)$ 的嵌入是紧致的.

定理 6.2.6 在 (6.2.1) 中, 若系数 $a_k(x)$ 满足条件: $a=0$, 对于任意的 $X>0$, $a_k(x)\in W_2^k(0,X)$ $(k=0,1,\cdots,n)$, $\inf\limits_{0<x<\infty}a_n(x)>0$, 且存在常数 a_k, 使得

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}|a_k(x)-a_k|\,\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n,\tag{6.2.8}$$

则由 (6.2.1) 生成的算子 A_0 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张的本质谱相同, 而且等于集合 $A\subset\mathbb{R}$, 即

$$\sigma_e(A_0)=A=[\Lambda,\infty),$$

其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}$.

证明 首先定义算子 B_0,

$$B_0u=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k u^{(2k)}(x),\quad \mathfrak{D}(B_0)=C_0^\infty(0,\infty).\tag{6.2.9}$$

根据引理 6.2.5, 对于任意小的 ε, 存在常数 $c_\varepsilon, c_1 > 0$, 使得

$$
\begin{aligned}
(B_0u,u) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^\infty a_k u^{(2k)}(x)\overline{u}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty a_k|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant a_n||u^{(n)}||^2 + \varepsilon||u^{(n)}||^2 + c_\varepsilon||u||^2 \leqslant 2a_n||u^{(n)}||^2 + c_1||u||^2. \qquad (6.2.10)
\end{aligned}
$$

其次根据定理所给条件对二次型 (A_0u,u) 进行估计, 由条件 (1)、(2) 可得

$$
\inf_{0<x<\infty} a_n(x) = \alpha > 0, \quad \sup_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}|a_k(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant c_0, \quad k = 0,1,\cdots,n-1,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
(A_0u,u) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^\infty a_k(x)u^{(2k)}(x)\overline{u}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \alpha||u^{(n)}||^2 - \sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty |a_k(x)||u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \alpha||u^{(n)}||^2 - \sum_{k=0}^{n}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}|^2\right)\int_v^{v+1}|a_k(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \alpha||u^{(n)}||^2 - nc_0\sum_{v=0}^{\infty}(\varepsilon||u^{(n)}||^2_{(v,v+1)} + c_\varepsilon||u||^2) \\
&\geqslant \alpha||u^{(n)}||^2 - nc_0\varepsilon||u^{(n)}||^2 - nc_0c_\varepsilon||u||^2.
\end{aligned}
$$

取 $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2nc_0}$,

$$
(A_0u,u) \geqslant \alpha/2||u^{(n)}||^2 - c_2||u||^2. \qquad (6.2.11)
$$

下面验证算子 A_0 和 B_0 满足引理 6.2.4 的条件, 根据 (6.2.10) 和 (6.2.11) 的估计得

$$
(B_0u,u) \leqslant 4a_n\alpha^{-1}(A_0u,u) + c_3||u||^2,
$$

以及 B_0 的下半有界性, 适当改变 a_0, 有如下不等式:

$$
||u||^2 \leqslant (B_0u,u) \leqslant c(A_0u,u), \quad \forall u(x) \in C_0^\infty(0,\infty) \qquad (6.2.12)
$$

成立. 设 B 是 B_0 的 Friedrichs 自共轭扩张, 以下验证 $\mathfrak{D}(B) \subset H_{A_0}$. 因为 B_0 是一个常系数微分算子, 根据定理 6.2.3 可知 B_0 是本质自共轭的, 则 $\mathfrak{D}(B)$ 是集合 $C_0^\infty(0,\infty)$ 在范数 $(||B_0u||^2 + ||u||^2)^{\frac{1}{2}}$ 下的完备化, 而范数 $(||B_0u||^2 + ||u||^2)^{\frac{1}{2}}$ 与 $W_2^{2n}(0,\infty)$ 的范数等价, 所以

$$
\mathfrak{D}(B) = W_2^{2n}(0,\infty).
$$

对于任意 $u(x) \in C_0^\infty(0,\infty)$, 有下面估计

$$||u||_{A_0}^2 = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant C||u||_{W_2^{2n}(0,\infty)}^2,$$

则 $\mathfrak{D}(B) \subset H_{A_0}$. 定义二次型 $s[u,v]$:

$$s[u,v] = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty s_k(x) u^{(k)}(x) \bar{v}^{(k)}(x) \, \mathrm{d}x, \quad u,v \in \mathfrak{D}(s) = H_{A_0},$$

其中 $s_k(x) = |a_k(x) - a_k|$ $(k = 1,2,\cdots,n)$, 二次型 $s[u,v]$ 满足引理 6.2.4 条件 (1)、(3), 以下验证也满足条件 (2), 任取 $u \in \mathfrak{D}(s) = H_{A_0}$,

$$\begin{aligned} s[u,u] &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty s_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}|^2 \, \mathrm{d}x + C_1||u^{(n)}||^2 + C_2||u||^2. \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

对于任意小的 ε, 有

$$\begin{aligned} (A_0 u, u) &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2} \int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}| \, \mathrm{d}x + (\alpha/2)||u^{(n)}||^2 - \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty |a_k(x)||u^{(k)}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2} \int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}| \, \mathrm{d}x + (\alpha/2)||u^{(n)}||^2 - nc_0\varepsilon||u^{(n)}||^2 - nc_0 c_\varepsilon ||u||^2. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon < (\alpha/4)nc_0$,

$$(A_0 u, u) \geqslant \frac{1}{2} \int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}| \, \mathrm{d}x + (\alpha/4)\|u^{(n)}\|^2 - C_3\|u\|^2. \tag{6.2.14}$$

由 (6.2.13) 和 (6.2.14) 便得

$$s[u,u] \leqslant C_4(A_0 u, u) + C_5\|u\|^2 \leqslant C\|u\|_{A_0}^2, \quad u \in H_{A_0}.$$

最后只需证明 $L^2(0,\infty)$ 内的有界集 M 在算子 B^{-1} 下的像集合 $B^{-1}M$ 在范数 $s^{\frac{1}{2}}\,[u,u]$ 下是预紧的即可. 对于任意的 $h \in M$, 如果 $B^{-1}h = u$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k u^{(2k)}(x) = h(x).$$

根据 M 的有界性和引理 6.2.4, 取充分小的 ε, 使得

$$\begin{aligned}C_M &\geqslant \left\|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k u^{2k}(x)\right\| \geqslant a_n \left\|u^{(2n)}\right\| - D_0 \sum_{k=0}^{n-1}\left\|u^{(2k)}\right\| \\ &\geqslant (a_n - \varepsilon D_0)\|u^{(2n)}\| - D_0 D_\varepsilon \|u\| \geqslant a_n/2\|u^{(2n)}\| - D\|u\|,\end{aligned}$$

所以

$$\|u^{(2n)}\| \leqslant D_1 + D_2\|u\|. \tag{6.2.15}$$

又根据 (6.2.12) 和 (6.2.15) 的估计得：对于 $u \in B^{-1}M$,

$$\|u\|^2 \leqslant (Bu, u) = (h, u) \leqslant \|h\|\|u\| \leqslant C_M\|u\|,$$

$$\|u\|_{W_2^{2n}(0,\infty)} \leqslant C. \tag{6.2.16}$$

下面证明对 $B^{-1}M$ 中的任意序列 $\{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$, 存在一个子序列 $\{u_{v_j}\}_{j=1,2,\cdots} \subset \{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$, 使得

$$s[u_{v_i} - u_{v_j}, u_{v_i} - u_{v_j}] \to 0, \quad i, j \to \infty. \tag{6.2.17}$$

根据定理的条件及 (6.2.16), 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $L > 0$, 使得当整数 $l > L$ 时, $\int_l^{l+1} s_k(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. 对于任意 $u_v(x), u_\mu(x) \in \mathfrak{D}(s)$, 不等式

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\int_L^\infty s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ \leqslant &\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\geqslant L}\int_l^{l+1} s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ \leqslant &\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\geqslant L}\Big(\max_{x\in[l,l+1]}|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\Big)\int_l^{l+1} s_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2n\varepsilon C^2\end{aligned}$$

成立. 所以对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在不依赖于 $u_v(x), u_\mu(x)$ 的有限整数 $L(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{L(\varepsilon)}^\infty s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

故对于 $v, \mu = 1, 2, \cdots$,

$$\begin{aligned}s[u_v - u_\mu, u_v - u_\mu] =&\sum_{k=0}^{n}\int_0^{L(\varepsilon)} s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &+\sum_{k=0}^{n}\int_{L(\varepsilon)}^\infty s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ \leqslant &c\sum_{k=0}^{n}\int_0^{L(\varepsilon)}|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x + \varepsilon,\end{aligned}$$

又因为 Sobolev 空间 $W_2^{2n}(0,L(\varepsilon))$ 在 Sobolev 空间 $W_2^n(0,L(\varepsilon))$ 中的嵌入是紧的, 因而 $B^{-1}M$ 中的任意序列 $\{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$, 存在一个子序列 $\{u_{v_j}\}_{j=1,2,\cdots}\subset\{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$, 使得

$$s[u_{v_i}-u_{v_j},u_{v_i}-u_{v_j}]\leqslant 2\varepsilon,\quad i,j\geqslant j(\varepsilon).$$

从而 (6.2.17) 成立, 则算子 A_0 和 B_0 满足引理 6.2.4 的所有条件, 所以

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A)=\sigma_{\mathrm{e}}(B).$$

由定理 6.2.3 可知 $\sigma_{\mathrm{e}}(B_0)=\sigma_{\mathrm{e}}(B)=A=[\Lambda,\infty)$, 其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}$, 故 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)=\sigma_{\mathrm{e}}(A)=A=[\Lambda,\infty)$. □

定理 6.2.6 只是对 $2n$ 阶常系数微分算子加满足一定条件的相关摄动, 不改变微分算子的本质谱; 对一般高阶的情形用类似的方法也可以得到如下结果.

定理 6.2.7 在微分算式

$$\tau u(x)=\sum_{k=0}^{n*}(-1)^k(a_k(x)u^{(k)}(x))^{(k)},\quad x\in(a,\infty)\tag{6.2.18}$$

中, 若系数 $a_k(x)$ 满足条件:

(1) 对于任意的 $X>0$, $a_k(x)\in W_2^k(0,X)(k=0,1,\cdots,n^*)$, 而且 $\inf\limits_{0<x<\infty}a_n(x)>0$, $a_{n^*}(x)>0,0<x<\infty$;

(2) 存在常数 a_k, 使得

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}|a_k(x)-a_k|\,\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n;$$

(3) $a_k(x)\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}a_k(x)\,\mathrm{d}x=0(k=n+1,n+2,\cdots,n^*)$, 则由 (6.2.18) 生成的算子 A_0 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张的本质谱相同, 而且等于集合 $A\subset\mathbb{R}$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)=A=[\Lambda,\infty),$$

其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}$.

在上述定理 6.2.7 中的条件 (3) 可换为更一般的假设

(3*) 对于任意的 $x>0$, 存在不依赖于 $u(x)$ 的常数 $\gamma(0<\gamma<1)$, $\alpha^*(0<\alpha^*<$

α), C^*, 使得

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=n+1}^{n^*}\int_x^{\infty} a_k^-(t)|u^{(k)}(t)|^2\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \gamma\left|\sum_{k=n+1}^{n^*}\int_x^{\infty} a_k^+(t)|u^{(k)}(t)|^2\,\mathrm{d}t\right| + \alpha^*\|u^{(n)}\|_{(x,\infty)} + C^*\|u\|_{(x,\infty)} \quad (6.2.19)
\end{aligned}
$$

成立, 其中 $a_k^-(x) = \min\{a_k(x), 0\}, a_k^+(x) = \max\{a_k(x), 0\}$, $u(x) \in C_0^{\infty}(0,\infty)$, 而且

$$
\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} |a_k(x)|\mathrm{d}x = 0, \quad k = n+1, n+2, \cdots, n^*.
$$

定理 6.2.7 的结论仍然成立, 证明方法完全类似定理 6.2.6.

下面我们考虑常系数微分算子在相关紧摄动下微分算子的本质谱.

设 B 是正定自共轭算子, 能量空间 H_B 是集合 $\mathfrak{D}(B)$ 在范数 $\|u\|_B = (Bu,u)^{\frac{1}{2}}$ 之下的完备化, 对应的双线性型为 $b[u,v] = (Bu,v)$, $u,v \in \mathfrak{D}(b) = \mathfrak{D}(B) = H_B$. 设 $s[u,v], u,v \in \mathfrak{D}(s) \supset H_B$ 是一个对称双线性型, 而且在 H_B 内有界, 即 $|s[u,v]| \leqslant C\|u\|_B\|v\|_B, u,v \in H_B$, 则存在一个定义在 H_B 上的有界自共轭算子 V 使得

$$
s[u,v] = [Vu,v]_B, \quad u,v \in H_B.
$$

定义 6.2.8 如果上面所定义的有界自共轭算子 V 在 H_B 上是紧算子, 称双线性型 $s[u,v]$ 关于双线性型 $b[u,v]$ 是相关紧的.

引理 6.2.9 设双线性型 $s[u,v]$ 关于双线性型 $b[u,v]$ 是相关紧的, 并且

$$
a[u,v] = b[u,v] + s[u,v], \quad u,v \in \mathfrak{D}(a) = \mathfrak{D}(b),
$$

则下面事实成立:

(1) $a[u,v]$ 是一个下半有界的、闭的双线性型, 范数 $\|\cdot\|_B$ 与 $a[u,v]$ 所定义的算子 A 下的范数 $\|\cdot\|_A$ 等价;

(2) 双线性型 $a[u,v]$ 和 $b[u,v]$ 所定义的自共轭算子 A 和 B 具有相同的本质谱, 即 $\sigma_{\mathrm{e}}(A) = \sigma_{\mathrm{e}}(B)$.

证明 (1) 设 $\alpha_j (j = 1,2,\cdots)$ 是 V 在空间 H_B 上的特征值, $u_j(x) (j = 1,2,\cdots)$ 为对应 α_j 的相互正交的特征向量. 由于 V 在空间 H_B 是紧算子, 所以 $\alpha_j \to 0 (j \to \infty)$ 并且对 $\forall u \in H_B$,

$$
Vu = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j[u,u_j]_B u_j.
$$

对于任意小的正数 ε, 存在一个数 j_0, 使得 $|\alpha_j| < \varepsilon$, $j > j_0$, 有

$$
\|Vu\|_B^2 \leqslant \varepsilon^2\|u\|_B^2 + j_0\|V\|^2\max_{1\leqslant j\leqslant j_0}|[u,u_j]_B|^2.
$$

因为 $\mathfrak{D}(B)$ 在空间 H_B 内稠密, 对于 $\eta>0$, 存在一列 $\widetilde{u}_j\in\mathfrak{D}(B)$, 使得

$$\|u_j-\widetilde{u}_j\|_B<\eta,\quad j=1,2,\cdots,j_0,$$

则

$$\begin{aligned}|[u,u_j]_B|^2&=|[u,u_j-\widetilde{u}_j]_B+[u,\widetilde{u}_j]_B|^2\leqslant 2|[u,u_j-\widetilde{u}_j]_B|^2+|[u,\widetilde{u}_j]_B|^2\\&\leqslant 2\eta^2\|u\|_B^2+2\|u\|^2\|B\widetilde{u}_j\|^2.\end{aligned}$$

如果选取充分小的 $\eta>0$, 使得 $2\eta^2j_0\|V\|_B^2\leqslant\varepsilon^2$, 结合以上两个不等式得

$$\|Vu\|_B^2\leqslant 2\varepsilon^2\|u\|_B^2+C_\varepsilon\|u\|^2.$$

于是有下面估计:

$$\begin{aligned}|s[u,u]|&=|[Vu,u]_B|\leqslant\|Vu\|_B\|u\|_B\leqslant\frac{1}{2\delta^2}\|Vu\|_B^2+\frac{\delta^2}{2}\|u\|_B^2\\&\leqslant\frac{1}{2\delta^2}(2\varepsilon^2\|u\|_B^2+C_\varepsilon\|u\|^2)+\frac{\delta^2}{2}\|u\|_B^2\\&=\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}+\frac{\delta^2}{2}\right)\|u\|_B^2+\frac{C_\varepsilon}{2\delta^2}\|u\|^2.\end{aligned}$$

取足够小的 ε 和 δ, 使得 $0<\varepsilon<\delta$, 而且 $\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}+\frac{\delta^2}{2}\right)<\frac{1}{2}$, 从而对 $\forall u\in H_B$, 有

$$a[u,u]=b[u,u]+s[u,u]\geqslant(1-\beta)\|u\|_B^2-C_\beta\|u\|^2,$$

所以 $a[u,v]$ 是下半有界的. 适当选取充分大的 c, 则 $a[u,v]+c(u,v)$ 是一个正定双线性型. 根据上面最后两个不等式及 Banach 逆算子定理可以得到在空间 H_B 上能量范数 $\|u\|_A=(a[u,u]+c(u,u))^{1/2}$ 与能量范数 $\|u\|_B$ 是等价的, 因此也得到 $a[u,v]$ 是一个在空间 H_B 上闭的双线性型.

(2) 不失一般性, 假设 $a[u,v]$ 和 $b[u,v]$ 都是正定的, 则逆算子 A^{-1},B^{-1} 存在, 要证明 $\sigma_{\mathrm{e}}(A)=\sigma_{\mathrm{e}}(B)$, 只要证明 $A^{-1}-B^{-1}$ 是紧算子即可. 对 $\forall h\in H$, 若 $Bu=h, Av=h, u,v\in H_B$, $\forall g\in H_B$ 有

$$\begin{aligned}b[u,g]&=(Bu,g)=(Av,g)=a[v,g]=b[v,g]+s[v,g]\\&=b[v,g]+[Vv,g]_B=b[v,g]+b[Vv,g]=b[v+Vv,g],\end{aligned}$$

因此 $u=v+Vv$, 即

$$VA^{-1}h=(B^{-1}-A^{-1})h.$$

由于 A^{-1} 是有界算子, V 是紧算子, 所以 $A^{-1}-B^{-1}$ 是紧算子. □

引理 6.2.10 设 $b[u,v]$ 是正定的、闭的双线性型, B 是由 $b[u,v]$ 所定义的自共轭算子, $s[u,v], u,v\in\mathfrak{D}(s)\supset H_B$ 是一个对称双线性型, 如果

(1) $|s[u,v]|\leqslant C\|u\|_B\|v\|_B, u,v\in H_B$;

(2) H_B 内的任何有界集 M 一定存在一个序列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得

$$s[u_j-u_k,u_j-u_k]\to 0,\quad j,k\to\infty.$$

证明 根据 (1) 可知 $s[u,v]$ 在空间 H_B 上存在一个自共轭算子 V, 使得

$$s[u,v]=[Vu,v]_B,\quad u,v\in H_B.$$

下面证明 V 是紧算子. 算子 V 的谱分解为

$$V=\int_{-\|V\|}^{\|V\|}\lambda\mathrm{d}E_\lambda=\int_0^{\|V\|}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda+\int_{-\|V\|}^{0}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda=V^++V^-,$$

其中 E_λ 表示算子 V 的谱族, $V^+=\displaystyle\int_0^{\|V\|}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda, V^-=\displaystyle\int_{-\|V\|}^{0}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$. E_0 和 $E-E_0$ 是两个相互直交的投影算子, 则 $H_B^-=E_0H_B$ 和 $H_B^+=(E-E_0)H_B$ 是两个相互直交空间, 根据条件 (2), 在空间 H_B^+ 内的任何有界集 M 内一定存在一个序列 $\{u_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, 使得

$$s[u_j^+-u_k^+,u_j^+-u_k^+]\to 0,\quad j,k\to\infty.$$

同样在空间 H_B^- 内的任何有界集 M 内一定存在一个序列 $\{u_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, 使得

$$s[u_j^--u_k^-,u_j^--u_k^-]\to 0,\quad j,k\to\infty.$$

因此有

$$\begin{aligned}\|(V^+)^{\frac12}(u_j^+-u_k^+)\|_B^2&=[V^+(u_j^+-u_k^+),u_j^+-u_k^+]_B=[V(u_j^+-u_k^+),u_j^+-u_k^+]_B\\&=s[u_j^+-u_k^+,u_j^+-u_k^+]\to 0,\quad j,k\to\infty,\end{aligned}$$

所以 $(V^+)^{\frac12}$ 在空间 H_B^+ 内是一个紧算子, 即 V^+ 在空间 H_B^+ 内是一个紧算子. 同样的方法可以证明 $-V^-$ 在空间 H_B^- 内是一个紧算子, 从而导出 $V=V^++V^-$ 在空间 $H_B=H_B^+\oplus H_B^-$ 上是紧算子. □

引理 6.2.11 设 $p(x),q(x)$ 是定义在 $\omega=[x_1,x_2]$ 上的实值函数, $|\omega|=x_2-x_1, p(x)\geqslant 0, p^{-1}(x), q(x)$ 在 ω 上可积, 若 $q(x)\geqslant 0(q(x)\leqslant 0)$, 则

$$\int_\omega(p(x)|u'|^2+q(x)|u|^2)\mathrm{d}x\geqslant\mu_\omega\left(1+|\omega|\mu_\omega\int_\omega p^{-1}\mathrm{d}x\right)^{-1}\|u\|_\omega^2,\tag{6.2.20}$$

其中 $\mu_\omega = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega q(x)\mathrm{d}x, u(x) \in C^1[x_1, x_2], \|u\|_\omega^2 = \int_\omega |u|^2\mathrm{d}x$, 在 $q(x) \leqslant 0$ 的情形, 需取充分小的 $|\omega|$, 使得 $\left(\int_\omega |q(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x\right) < 1$.

证明　设 $\rho(x) \in C^1[x_1, x_2]$ 是实值函数并且在 $[x_1, x_2]$ 内有一个零点 x_0, 根据 Schwarz 不等式得

$$\rho^2(x) = \left(\int_{x_0}^x \rho'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_{x_0}^x p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_{x_0}^x p(t)[\rho'(t)]^2\mathrm{d}t\right)$$
$$\leqslant \left(\int_\omega p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[\rho'(t)]^2\mathrm{d}t\right),$$

不等式两边积分

$$\|\rho\|_\omega^2 \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[\rho'(t)]^2\mathrm{d}t\right).$$

设 $u(x) = v(x) + \mathrm{i}w(x) \in C^1[x_1, x_2]$ 是复值函数并且在 $[x_1, x_2]$ 内 $|u(x)|$ 取最小值点处的函数值记为 $u_0 = v_0 + \mathrm{i}w_0$, 则

$$\int_\omega (v(x) - v_0)^2\mathrm{d}x \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[v'(t)]^2\mathrm{d}t\right),$$

$$\int_\omega (w(x) - w_0)^2\mathrm{d}x \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[w'(t)]^2\mathrm{d}t\right),$$

所以

$$\int_\omega |u(x) - u_0|^2\mathrm{d}x \leqslant |\omega|\left(\int_\omega p^{-1}(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_\omega p(t)[u'(t)]^2\mathrm{d}t\right).$$

当 $q(x) \geqslant 0$ 时,

$$\int_\omega (p(x)|u'|^2 + q(x)|u|^2)\mathrm{d}x \geqslant \left(|\omega|\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x\right)^{-1}\|u - u_0\|_\omega^2 + \mu_\omega\|u_0\|_\omega^2$$
$$= \frac{\mu_\omega}{1+\delta^2}\left[\delta^2\left(|\omega|\mu_\omega\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x\right)^{-1}(1+\delta^{-2})\|u - u_0\|_\omega^2 + (1+\delta^2)\|u_0\|_\omega^2\right],$$

选取 $\delta^2 = |\omega|\mu_\omega\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x$, 并应用不等式

$$\|u\|_\omega^2 \leqslant (1+\delta^{-2})\|u - u_0\|_\omega^2 + (1+\delta^2)\|u_0\|_\omega^2$$

可得 (6.2.20). 当 $q(x) \leqslant 0$ 时, 考虑 $|u(x)|$ 取最大值点处的函数值记为 $u_0 = v_0 + \mathrm{i}w_0$, 利用同样的方法得到结论. □

当 $q(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上变号时, 使用相同方法得如下结论:

引理 6.2.12 设 $p(x), q(x)$ 是定义在 $\omega=[x_1,x_2]$ 上的实值函数 $|\omega|=x_2-x_1$, $p(x)\geqslant 0$, $p^{-1}(x), q^{+}(x)=\max\{0,q(x)\}$, $q^{-}(x)=\min\{0,q(x)\}$ 在 $\omega=[x_1,x_2]$ 上可积, 令 $\mu_\omega(q)=\dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega q(x)\mathrm{d}x, \mu_\omega(q^-)=\dfrac{1}{|\omega|}\int_\omega q^-(x)\mathrm{d}x, \mu_\omega(q^+)=\dfrac{1}{|\omega|}\int_\omega q^+(x)\mathrm{d}x$, 则对 $u(x)\in C^1[x_1,x_2]$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\omega (p|u'|^2+q|u|^2)\mathrm{d}x\\ \geqslant\ & \frac{\mu_\omega(q)+4|\omega|\mu_\omega(q^-)\mu_\omega(q^+)\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x}{(1+2|\omega|\mu_\omega(q^-)\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x)(1+2|\omega|\mu_\omega(q^+)\displaystyle\int_\omega p^{-1}(x)\mathrm{d}x)}\|u\|_\omega^2.\end{aligned}\tag{6.2.21}$$

在以上结论中, 如果 $p(x)\equiv h$=const, $q(x)=-s(x)$, 则 (6.2.21) 可表示为如下形式:

$$\left|\int_\omega s(x)|u(x)|^2\mathrm{d}x\right|\leqslant h\|u'\|_\omega^2+\frac{\mu_\omega(s)+4h^{-1}|\omega|^2\mu_\omega(s^-)\mu_\omega(s^+)}{(1-2h^{-1}|\omega|^2\mu_\omega(s^-))(1-2h^{-1}|\omega|^2\mu_\omega(s^+))}\|u\|_\omega^2.$$

定理 6.2.13 在 (6.2.1) 中, 若系数 $a_k(x)$ 满足条件:

(1) 对于任意的 $X>0$, $a_k(x)\in W_2^k(0,X)(k=0,1,\cdots,n)$, 而且

$$a_n(x)\equiv a_n>0,\ \sup_{0<x<\infty}\int_x^{x+\omega}|a_k(x)|\mathrm{d}x\to 0,\quad \omega\to 0, k=0,1,\cdots,n-1;$$

(2) 对于固定的 $\omega>0$, 存在常数 a_k, 使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}a_k(x)\mathrm{d}x=a_k,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1,\tag{6.2.22}$$

则由 (6.2.1) 生成的算子 A_0 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张的本质谱相同, 而且等于集合 $A\subset\mathbb{R}$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A_0)=A=[\Lambda,\infty),$$

其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}$.

证明 定义双线性型

$$b_0[u,v]=\sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty a_ku^{(k)}\bar{v}^{(k)},\quad u,v\in\mathfrak{D}(b_0)=C_0^\infty(0,\infty),$$

则 $b_0[u,v]$ 是下半有界的. 不妨设也是正定的, 令 $b[u,v]$ 是 $b_0[u,v]$ 的闭包. 则 $b[u,v]$ 导出的算子 B 是下半有界的、正定的自共轭算子, 其本质谱

$$\sigma_{\mathrm{e}}(B)=[\Lambda,\infty),$$

其中 $\Lambda = \inf\limits_{0<\xi<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \xi^{2k}$.

定义双线性型

$$s[u,v] = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\infty} (a_k(x) - a_k) u^{(k)} \bar{v}^{(k)}, \quad u, v \in H_B,$$

下面证明双线性型 $s[u,v]$ 关于双线性型 $b[u,v]$ 是相关紧的. 设 $s_k(x) = a_k(x) - a_k$, 则 (6.2.22) 等价于

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} s_k(x) \mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1, \omega > 0,$$

再由条件 (1) 及引理 6.2.12 中的 (6.2.21), 对 $\left| \int_x^{\infty} s_k(x) |u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x \right|$ 作估计. 对于常数$h > 0$, 存在充分小的 $\omega_0(h) > 0$ 和充分大的 $x_0(h)$, 当 $\omega < \omega_0(h), x > x_0(h)$ 时,

$$\left| \int_x^{x+\omega} s_k(x) |u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x \right| \leqslant h \|u^{(k+1)}\|^2_{(x,x+\omega)} + h \|u^{(k)}\|^2_{(x,x+\omega)},$$

从而

$$\left| \int_x^{\infty} s_k(x) |u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x \right| \leqslant h \|u^{(k+1)}\|^2_{(x,\infty)} + h \|u^{(k)}\|^2_{(x,\infty)}, \tag{6.2.23}$$

所以

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^{\infty} s_k(x) |u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x \right| \leqslant 2h \|u\|^2_{W_2^n(x,\infty)}, \tag{6.2.24}$$

根据定理的条件 (1) 得

$$|s[u,u]| \leqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^n(0,\infty)},$$

又由于

$$\|u\|^2_{W_2^n(0,\infty)} \leqslant c b[u,u],$$

则

$$|s[u,u]| \leqslant C b[u,u]. \tag{6.2.25}$$

设 $M \subset H_B$ 是有界集, 根据 (6.2.24), 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在充分大的 x 及 $M \subset H_B$ 中的一个无限序列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 使得

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^{\infty} s_k(t) |u_j^{(k)}(t) - u_i^{(k)}(t)|^2 \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon/2, \tag{6.2.26}$$

又因为空间 $W_2^n(0,x)$ 到空间 $C^{n-1}(0,x)$ 的嵌入是紧致的, 则有界序列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 存在一个子序列 $\{u_{v_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset M$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \max_{t\in[0,x]} |u_{v_j}^{(k)}(x) - u_{v_i}^{(k)}(x)|^2 \to 0, \quad i,j \to +\infty. \tag{6.2.27}$$

由 (6.2.26) 和 (6.2.27) 得, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $j_0(\varepsilon)$, 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\infty} s_k(t)|u_{v_j}^{(k)}(t) - u_{v_i}^{(k)}(t)|^2 \mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{x} s_k(t)|u_{v_j}^{(k)}(t) - u_{v_i}^{(k)}(t)|^2 \mathrm{d}t\right| \\
&+ \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_x^{\infty} s_k(t)|u_{v_j}^{(k)}(t) - u_{v_i}^{(k)}(t)|^2 \mathrm{d}t\right| < \varepsilon, \quad i,j > j_0(\varepsilon),
\end{aligned}$$

所以

$$s[u_{v_j} - u_{v_i}, u_{v_j} - u_{v_i}] \to 0, \quad i,j \to +\infty. \tag{6.2.28}$$

根据 (6.2.25) 和 (6.2.28), 以及引理 6.2.10 得双线性型 $s[u,v]$ 关于双线性型 $b[u,v]$ 是相关紧的, 由引理 6.2.9 定理得证. □

定理 6.2.14 在微分算式

$$\tau u(x) = \sum_{k=0}^{n^*} (-1)^k (a_k(x)u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad x \in (a,\infty) \tag{6.2.29}$$

中, 若系数 $a_k(x)$ 满足条件:

(1) 对于任意的 $X > 0$, $a_k(x) \in W_2^k(0,X), k = 0,1,\cdots,n^*$, 而且 $\inf\limits_{0<x<\infty} a_n(x) > 0, a_{n^*}(x) > 0, 0 < x < \infty$;

(2) $\sup\limits_{0<x<\infty} \displaystyle\int_x^{x+\omega} |a_k(x)|\mathrm{d}x \to 0, \omega \to 0, k = 0,1,\cdots,n-1$;

(3) 对于固定的 $\omega > 0$, 存在常数 a_k, 使得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} a_k(x)\mathrm{d}x = a_k, \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1;$$

(4) $a_k(x) \geqslant 0, \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_x^{x+1} a_k(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k = n+1, n+2,\cdots,n^*$,

则由 (6.2.29) 生成的算子 A_0 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张的本质谱相同, 而且等于集合 $A \subset \mathbb{R}$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) = A = [\Lambda, \infty),$$

其中 $\Lambda = \inf\limits_{0<\xi<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \xi^{2k}$.

证明方法类似定理 6.2.13(参阅 [21]).

6.2.3 常系数自共轭 Euler 微分算子及其相关摄动下的本质谱

本小节研究微分算式

$$B_0 u(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x^{2k} a_k(x) u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad x \in (0, \infty) \tag{6.2.30}$$

生成的自共轭微分算子的本质谱, 其中 $a_k(x)$ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的实函数. 首先研究 $a_k(x) \equiv a_k = \text{const}(0 < x < \infty, k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 在 $(0, \infty)$ 是常值函数的情形. 在此情形下, (6.2.30) 称为 Euler 微分算式, (6.2.30) 生成的算子称为 Euler 微分算子.

定理 6.2.15 在 (6.2.30) 中, 若系数 $a_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 都是常值函数, 即 $a_k\ (x) = a_k \equiv \text{const}$, $a_k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$ 均为常数; 而且 $a_n > 0$, 则由 (6.2.30) 生成的算子 T_0 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张具有相同的本质谱, 而且等于集合 $A \subset \mathbb{R}$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0) = A = [\Lambda, \infty), \tag{6.2.31}$$

其中

$$\Lambda = \inf_{0<\xi<\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k} \left[\xi^2 + \left(j - \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \tag{6.2.32}$$

证明 作变换

$$(\tau u)(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} u(\mathrm{e}^t) \equiv \varphi(t),$$

$$(\tau^{-1}\varphi)(x) = u(x), \quad x = \mathrm{e}^t,$$

则 τ 是 $L^2(0, \infty)$ 到 $L^2(-\infty, \infty)$ 上一一的、在上的等距变换; 而且在 L^2 范数下, 将 $C_0^\infty\ (0,\ \infty)$ 一一在上的变为空间 $C_0^\infty(-\infty, \infty)$. 对 $\forall u(x) \in C_0^\infty(0, \infty)$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} u(\mathrm{e}^t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \varphi(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^{-\frac{1}{2}}) \varphi(t) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(t) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \varphi(t) + x^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\varphi(t)) \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

$$u'(x) = x^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2} \right) \varphi(t). \tag{6.2.33}$$

对 $u(x)$ 求 k 次导数,

$$u^{(k)}(x) = x^{-k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k + \frac{3}{2} \right) \cdots \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2} \right) \varphi(t),$$

从而

$$(x^{2k}u^{(k)}(x))' = x^{k-\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - (k-\frac{1}{2})^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k + \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\right)\varphi(t),$$

$$(x^{2k}u^{(k)}(x))'' = x^{k-\frac{5}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\right)\varphi(t).$$

求 k 次导数得

$$(x^{2k}u^{(k)}(x))^{(k)} = x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi(t). \tag{6.2.34}$$

由于 $a_k(x) = a_k$ 为常数, 则 (6.2.30) 化为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k (x^{2k}u^{(k)})^{(k)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi(t). \tag{6.2.35}$$

定义算子 L_0 : $\mathfrak{D}(L_0) = C_0^\infty(-\infty,\infty)$, $\forall\varphi \in \mathfrak{D}(L_0)$,

$$L_0\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)\varphi(t).$$

由上面的运算及定义知 $T_0 = \tau^{-1}L_0\tau$. 显然, L_0 是下半有界的, 而且 τ 是单位算子, 则 L_0 与 T_0 具有相同的本质谱, $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0) = \sigma_{\mathrm{e}}(L_0)$.

根据定理 6.2.3 得由 (6.2.30) 生成的算子 T_0 是下半有界的对称算子, 其任何自共轭扩张具有相同的本质谱, 而且等于集合 $A \subset \mathbb{R}$,

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0) = A = [\Lambda,\ \infty),$$

其中 $\Lambda = \inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \prod\limits_{j=1}^{k}\left[\xi^2 + \left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right]$. 所以定理得证. □

Euler 微分算子的系数作相关紧摄动后不改变微分算子的本质谱.

定理 6.2.16 在 (6.2.30) 中, 若系数 $a_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $a_k(x) \in W_2^k[a,X], 0 \leqslant k \leqslant n, \forall X > a$;

(2) $a_n(x) \equiv a_n > 0,\ x \in (a,\infty)$;

(3) 存在常数 a_k $(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$, 使得

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\int_x^{2x} |a_k(t) - a_k|\mathrm{d}t = 0, \tag{6.2.36}$$

则由 (6.2.30) 生成的最小算子 T_0 是一个下半有界的对称微分算子, T_0 的任何自共轭扩张具有相同的本质谱 $\sigma_e(T_0)$, 而且等于集合 $A\subset\mathbb{R}$, 即

$$\sigma_e(T_0)=A=[\Lambda,\ \infty),$$

其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\prod\limits_{j=1}^{k}\left[\xi^2+\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right]$.

证明　由微分算子分解定理知, 研究 T_0 的本质谱 $\sigma_e(T_0)$, 最终归结为对充分大的 $X>0$, 研究 $T_{0(X,\infty)}$ 的本质谱, 其中 $T_{0(X,\infty)}$ 是微分算子 T_0 在区间 $[X,\infty)$ 上的限制, $T_{0(X,\infty)}u=T_0u$, $u(x)\in\mathfrak{D}(T_{0(X,\infty)})$, 即 $u(x)\in C_0^\infty(X,\infty)\cap\mathfrak{D}(T)$. 而且用 T, $T_{[a,X]}$, $T_{(X,\infty)}$ 分别表示微分算子 T_0, $T_{0[a,X]}$, $T_{0(X,\infty)}$ 的 Friedrichs 自共轭扩张, 则

$$\sigma_e(T_0)=\sigma_e(T_{0(X,\infty)}).$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 由条件 (3) 知, 存在 $X>0$, 当 $x>X$ 时,

$$x^{-1}\int_x^{2x}|a_k(t)-a_k|\mathrm{d}t<\varepsilon,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

下面对 $u(x)\in\mathfrak{D}(T_{0(X,\infty)})$, 估计 $(T_0'u,u)_{(X,\infty)}$,

$$(T_0'u,u)_{(X,\infty)}=\sum_{k=0}^{n}\int_X^\infty(-1)^k[x^{2k}a_k(x)u^{(k)}(x)]^{(k)}\,\bar{u}(x)\mathrm{d}x.\tag{6.2.37}$$

对 (6.2.37) 右端分部积分得

$$\begin{aligned}(T_0'u,u)_{(X,\infty)}&=\sum_{k=0}^{n}\int_X^\infty(a_k(x)x^{2k})|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x,\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_X^\infty a_kx^{2k}|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x\\&\quad+\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty[a_k(x)-a_k]x^{2k}|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{6.2.38}$$

对 (6.2.38) 的右端作估计,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty|a_k(x)|x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}\int_{2^vX}^{2^{v+1}X}|a_k(x)|x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\=&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^vX\int_1^2|a_k(2^vXt)|t^{2k}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^ku(2^vXt)\right|^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty} 2^{2n} \max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2 \cdot 2^v X\int_1^2 |a_k(2^v Xt)|\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty} 2^{2n} \max_{1<t<\infty}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2 \cdot 2^v X \cdot \frac{1}{2^v X}\int_{2^v X}^{2^{v+1}X} |a_k(x)|\mathrm{d}x. \quad (6.2.39)$$

由 (6.2.36) 知, $\frac{1}{2^v X}\int_{2^v X}^{2^{v+1}X} |a_k(x)|\mathrm{d}x < |a_k| + \varepsilon$, 所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty |a_k(x)|x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty} 2^{2n}\cdot C\, 2^v X \max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} C 2^{2n} 2^v X\left(\sum_{k=0}^{n-1}\max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2\right). \quad (6.2.40)$$

利用引理 6.2.5 的 (6.2.7), 对 $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists C_{\varepsilon_1} > 0$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2 \leqslant \varepsilon_1 \int_1^2 \left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^v Xt)\right|^2 \mathrm{d}t + C_{\varepsilon_1}\int_1^2 |u(2^v Xt)|^2\mathrm{d}t.$$

则 (6.2.40) 化为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty |a_k(x)|x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{v=0}^{\infty} C 2^{2n} 2^v X\left(\varepsilon_1\int_1^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^v Xt)\right|^2\mathrm{d}t + C_{\varepsilon_1}\int_1^2 |u(2^v Xt)|^2\mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant \varepsilon_1\, C_1\int_X^\infty x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\mathrm{d}x + C_2\int_X^\infty |u(x)|^2\mathrm{d}x. \quad (6.2.41)
\end{aligned}$$

由 ε_1 的任意性, 取 $\varepsilon_1 C_1 < a_n/2$, 便得

$$(T_0'u, u)_{(X,\infty)} \geqslant a_n/2\int_X^\infty x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\mathrm{d}x - C_2\int_X^\infty |u(x)|^2\mathrm{d}x. \quad (6.2.42)$$

将算子 $T_{0(X,\infty)}$ 进行分解, 定义算子

$$B_0 u(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^{2k}a_k u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad u(x)\in C_0^\infty(X,\infty),$$

$$S_0 u(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^{2k}(a_k(x)-a_k)u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad u(x)\in C_0^\infty(X,\infty),$$

则 $T_{0(X,\infty)}u = B_0u + S_0u$. 又由于

$$(B_0u, u) \leqslant C_3 \left(\int_X^\infty x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_X^\infty |u(x)|^2 \mathrm{d}x \right),$$

所以, 适当调整 $a_0(x)$ 以及充分大的 b_0, 可使下面关系成立:

$$\|u\|^2 \leqslant (B_0u, u) \leqslant c(T_{0(X,\infty)}u, u), \quad u(x) \in C_0^\infty(X, \infty).$$

用 $B, S, T_{(X,\infty)}$ 分别表示微分算子 B_0, S_0, $T_{0(X,\infty)}$ 的 Friedrichs 自共轭扩张, 下面证明 $\mathfrak{D}(B) \subset H_{A_0}$. 因为 B_0 是一个常系数微分算子, 根据定理 6.2.15 可知 B_0 是本质自伴的, 则 $\mathfrak{D}(B)$ 是集合 $C_0^\infty(X,\infty)$ 在范数 $(\|B_0u\|^2 + c\|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 下的完备化,

$$\mathfrak{D}(B) = \left\{ u | u \in W_2^{2n}(X, \infty), \int_X^\infty x^{2n}|u^{(n)}|^2 \mathrm{d}x + \int_X^\infty |u|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

又对于任意 $u(x) \in C_0^\infty(X, \infty)$, 结合 (6.2.41) 有下面估计

$$\|u\|^2_{T_{0(X,\infty)}} = \sum_{k=0}^n \int_X^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\|u\|^2_{W_2^{2n}(0,\infty)}$$

成立, 则 $\mathfrak{D}(B) \subset H_{A_0}$. 定义二次型 $s[u, v]$:

$$s[u, v] = \sum_{k=0}^n \int_0^\infty s_k(x) x^{2k} u^{(k)}(x) \bar{v}^{(k)}(x) \mathrm{d}x, \quad u, v \in \mathfrak{D}(s) = H_{A_0},$$

其中 $s_k(x) = |a_k(x) - a_k| (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 二次型 $s[u, v]$ 满足引理 6.2.4 条件 (1)、(3), 以下验证也满足条件 (2). 任取 $u \in D(s) = H_{A_0}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \int_X^\infty |a_k(x) - a_k| x^{2k} |u^{(k)}|^2 \mathrm{d}x \\
=& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{v=0}^\infty \int_{2^v X}^{2^{v+1}X} |a_k(x) - a_k| x^{2k} |u^{(k)}|^2 \mathrm{d}x \\
=& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{v=0}^\infty 2^v X \int_1^2 |a_k(2^v Xt) - a_k| t^{2k} \left| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt) \right|^2 \mathrm{d}t \\
\leqslant& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{v=0}^\infty 2^{2n} \max_{1<t<\infty} \left| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt) \right|^2 \cdot 2^v X \cdot \frac{1}{2^v X} \int_{2^v X}^{2^{v+1}X} |a_k(x) - a_k| \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由 (6.2.36) 知, $\dfrac{1}{2^v X}\displaystyle\int_{2^v X}^{2^{v+1}X}|a_k(x)-a_k|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|a_k(x)-a_k|x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{\infty}2^{2n}\cdot\varepsilon\,2^v X\max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2\\
=&\sum_{v=0}^{\infty}\varepsilon\,2^{2n}2^v X\left(\sum_{k=0}^{n-1}\max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2\right).
\end{aligned}\tag{6.2.43}$$

利用引理 6.2.5 的 (6.2.7) 得, 对 $\forall\varepsilon_1>0,\exists C_{\varepsilon_1}>0$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\max_{1<t<2}\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k u(2^v Xt)\right|^2\leqslant\varepsilon_1\int_1^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^v Xt)\right|^2\mathrm{d}t+C_{\varepsilon_1}\int_1^2|u(2^v Xt)|^2\mathrm{d}t,$$

则 (6.2.43) 化为

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty}|a_k(x)-a_k|x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\sum_{v=0}^{\infty}\varepsilon 2^{2n}2^v X\left(\varepsilon_1\int_1^2\left|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n u(2^v Xt)\right|^2\mathrm{d}t+C_{\varepsilon_1}\int_1^2|u(2^v Xt)|^2\mathrm{d}t\right)\\
\leqslant&\,\varepsilon\,C\left[\sum_{v=0}^{\infty}\left(\int_{2^v X}^{2^{v+1}X}x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\mathrm{d}x+\int_{2^v X}^{2^{v+1}X}|u(x)|^2\mathrm{d}x\right)\right]\\
=&\,\varepsilon\,C\left(\int_X^{\infty}x^{2n}|u^{(n)}(x)|^2\mathrm{d}x+\int_X^{\infty}|u(x)|^2\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}\tag{6.2.44}$$

其中 $C=\max\{2^{2n}\varepsilon_1,2^{2n}C_{\varepsilon_1}\}$. 所以

$$\begin{aligned}
s[u,u]=&\sum_{k=0}^{n}\int_X^{\infty}s_k(x)x^{2k}|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_X^{\infty}a_n x^{2n}|u^{(n)}|^2\mathrm{d}x+\varepsilon C||x^{2n}u^{(n)}||_{(X,\infty)}^2+\varepsilon C||u||_{(X,\infty)}^2.
\end{aligned}\tag{6.2.45}$$

从 (6.2.42) 和 (6.2.45), 便得

$$s[u,u]\leqslant C_4(A_0u,u)+C_5||u||^2\leqslant C||u||_{A_0}^2,\quad u\in H_{A_0}.$$

最后只需证明 $L^2(X,\infty)$ 内的有界集 M 在算子 B^{-1} 下的像集 $B^{-1}M$ 在范数 $s^{\frac{1}{2}}[u,u]$ 下是预紧的即可.

对于任意的 $h \in M$, 如果 $B^{-1}h = u$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k (x^{2k}u^{(k)}(x))^{(k)} = h(x).$$

根据 M 的有界性和引理 6.2.4, 取充分小的 ε, 使得

$$\begin{aligned} C_M &\geqslant \left|\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k u^{2k}(x)\right|\right| \geqslant a_n||x^{2n}u^{(2n)}|| - D_0\sum_{k=0}^{2n-1}||u^{(k)}|| \\ &\geqslant (a_n - \varepsilon D_0)||x^{2n}u^{(2n)}|| - D_0D_\varepsilon||u|| \geqslant a_n/2||x^{2n}u^{(2n)}|| - D||u||, \end{aligned}$$

所以

$$||x^{2n}u^{(2n)}|| \leqslant D_1 + D_2||u||. \tag{6.2.46}$$

又根据 (6.2.43) 和 (6.2.46) 的估计得: 对于 $u \in B^{-1}M$,

$$||u||^2 \leqslant c|(Bu,u)| = c|(h,u)| \leqslant c||h||||u|| \leqslant cC_M||u||,$$

$$\int_X^{\infty}(x^{2n}|u^{(n)}|^2 + |u|^2)\mathrm{d}x \leqslant C. \tag{6.2.47}$$

下面证明对 $B^{-1}M$ 中的任意序列 $\{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$, 存在一个子序列 $\{u_{v_j}\}_{j=1,2,\cdots} \subset \{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$, 使得

$$s[u_{v_i} - u_{v_j}, u_{v_i} - u_{v_j}] \to 0, \quad i,j \to \infty, \tag{6.2.48}$$

由定理的基本条件, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x > X$ 时,

$$x^{-1}\int_x^{2x}|a_k(t) - a_k|\mathrm{d}t < \varepsilon, \quad k = 0,1,\cdots,n-1.$$

根据 (6.2.44) 的估计, 对于任意 $u_v(x), u_\mu(x) \in \mathfrak{D}(s)$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1}\int_X^{\infty} s_k(x)x^{2k}|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x \\ =&\varepsilon\, C\left(\int_X^{\infty} x^{2n}|u_v^{(n)}(x) - u_\mu^{(n)}(x)|^2\mathrm{d}x + \int_X^{\infty}|u_v(x) - u_\mu(x)|^2\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

成立. 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在不依赖于 $u_v(x), u_\mu(x) \in M$ 的有限整数 $X(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{X(\varepsilon)}^{\infty} s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

所以, 对于 $v, \mu = 1,2,\cdots$,

$$s[u_v - u_\mu, u_v - u_\mu] = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{L(\varepsilon)}^{\infty} s_k(x)|u_v^{(k)}(x) - u_\mu^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

$B^{-1}M$ 中的任意序列 $\{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$，存在一个子序列 $\{u_{v_j}\}_{j=1,2,\cdots} \subset \{u_v\}_{v=1,2,\cdots}$，使得

$$s[u_{v_i} - u_{v_j}, u_{v_i} - u_{v_j}] \leqslant \varepsilon, \quad i, j \geqslant j(\varepsilon),$$

从而 (6.2.17) 成立, 则算子 $T_{0(X,\infty)}$ 和 B_0 满足引理 6.2.4 的所有条件, 所以

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_{(X,\infty)}) = \sigma_{\mathrm{e}}(B).$$

由定理 6.2.15 可知 $\sigma_{\mathrm{e}}(B) = [\Lambda, \infty)$, 其中 $\Lambda = \inf\limits_{0<\xi<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \prod\limits_{j=1}^{k} \left[\xi^2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)^2\right]$, 故 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0) = \sigma_{\mathrm{e}}(T) = A = [\Lambda, \infty)$. □

同样的方法可以证明更一般的结论.

定理 6.2.17 在微分算式

$$l(u) = \sum_{k=0}^{n^*} (-1)^k (x^{2k} a_k(x) u^{(k)}(x))^{(k)}, \quad x \in (a, \infty), a > 0 \tag{6.2.49}$$

中, 若系数 $a_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $a_k(x) \in W_2^k[a, X]$, $0 \leqslant k \leqslant n^*$, $\inf\limits_{a<x<\infty} a_n(x) = \alpha > 0, a_{n^*}(x) > 0, a < x < \infty$;

(2) 对于任意的 $x > 0$, 存在不依赖于 $u(x)$ 的常数 $\gamma(0 < \gamma < 1), \alpha^*(0 < \alpha^* < \alpha)$, C^* 使得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n^*} \int_x^{\infty} a_k^-(t) |u^{(k)}(t)|^2 \mathrm{d}t \right| \leqslant \gamma \left| \sum_{k=n+1}^{n^*} \int_x^{\infty} a_k^+(t) |u^{(k)}(t)|^2 \mathrm{d}t \right| + \alpha^* ||u^{(n)}||_{(x,\infty)} + C^* ||u||_{(x,\infty)} \tag{6.2.50}$$

成立, 其中 $a_k^-(x) = \min\{a_k(x), 0\}$, $a_k^+(x) = \max\{a_k(x), 0\}$, $u(x) \in C_0^{\infty}(0, \infty)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1} \displaystyle\int_x^{2x} |a_k(x)| \mathrm{d}x = 0, \quad k = n+1, n+2, \cdots, n^*$;

(4) 存在常数 a_k, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$, 使得

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \int_x^{2x} |a_k(t) - a_k| \mathrm{d}t = 0, \tag{6.2.51}$$

则由 (6.2.47) 生成的最小算子 T_0 是一个下半有界的对称微分算子, T_0 的任何自共轭扩张具有相同的本质谱 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)$, 而且等于集合 $A \subset \mathbb{R}$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0) = A = [\Lambda, \infty),$$

其中 $\Lambda = \inf\limits_{0<\xi<\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \prod\limits_{j=1}^{k} \left[\xi^2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)^2\right]$.

§6.3 自共轭微分算子谱的离散性

对于自共轭算子 A 而言, 其谱是离散的充分必要条件是自共轭算子 A 的本质谱是空集, 即 $\sigma_e(A)=\varnothing$. 而由微分算式 (6.1.6)(其中 $p_k(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数) 所生成的最小算子 A_0 是一个具有有限亏指数的对称微分算子, A_0 的所有自共轭扩张生成自共轭微分算子具有相同的本质谱.

6.3.1 一般类型微分算子谱的离散性

在微分算式 (6.1.6) 中, 当 $p_k(x)=a_k(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数时, 微分算式 (6.1.6) 是对称微分算式

$$\tau u(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)u^{(k)}(x))^{(k)},\quad x\in(0,\infty). \tag{6.3.1}$$

本小节研究微分算式 (6.3.1) 中系数 $a_k(x)$ 满足如下基本条件:

(i) $a_k(x)\in W_0^k(0,X), 0\leqslant k\leqslant n, \forall X>0$;

(ii) $a_n(x)>0, 0\leqslant x<\infty$

时所生成的微分算子谱的离散性.

引理 6.3.1 如果 $a_k(x)\geqslant 0, x\in\omega=[x_1,x_2], k=r,\cdots,s, 0\leqslant r<s\leqslant n$, 则对于 $u(x)\in C^n[x_1,x_2]$, 不等式

$$\sum_{k=r}^{s}\int_\omega a_k(x)|u^{(k)}(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\omega^{2(s-r)}\rho_{\omega,s}^{-1}+\sum_{k=r}^{s-1}|\omega|^{2(k-r)}\mu_{\omega,k}^{-1}\right)^{-1}||u^{(r)}||_\omega^2 \tag{6.3.2}$$

成立, 其中 $\rho_{\omega,s}=\left(\dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega\frac{1}{a_s(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}, \mu_{\omega,k}=\dfrac{1}{|\omega|}\displaystyle\int_\omega\frac{1}{a_k(x)}\,\mathrm{d}x.$

证明 利用引理 6.2.11, 对于 $u(x)\in C^n[x_1,x_2]$,

$$\sum_{k=r}^{s}\int_\omega a_k(x)|u^{(k)}(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant(\omega^2\rho_{\omega,s}^{-1}+\mu_{\omega,s-1}^{-1})^{-1}||u^{(s-1)}||_\omega^2+\sum_{k=r}^{s-2}\int_\omega a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

反复多次利用引理 6.2.11 便得不等式 (6.3.2). □

定理 6.3.2 对称微分算式 (6.3.1) 中 $a_k(x)\geqslant 0(k=0,1,\cdots,n)$ 满足基本假设 (i)、(ii), 并且满足

(iii) 存在整数 $s, 1\leqslant s\leqslant n$ 及 $(0,\infty)$ 的一个分划 $Z=\{x_1=0,x_2,x_3,\cdots\},\omega_v=[x_v,x_{v+1}]$, 使得当 $v\to\infty$ 时,

$$|\omega_v|^{-2s}\rho_{\omega_{v,s}}\to\infty, |\omega_v|^{-2k}\mu_{\omega_{v,k}}\to\infty,\quad 0\leqslant k\leqslant s-1, \tag{6.3.3}$$

其中

$$\rho_{\omega_{v,s}} = \left(\frac{1}{|\omega_v|} \int_{x_v}^{x_{v+1}} \frac{1}{a_s(x)} \mathrm{d}x \right)^{-1}, \quad \mu_{\omega_{v,k}} = \frac{1}{|\omega_v|} \int_{x_v}^{x_{v+1}} \frac{1}{a_k(x)} \mathrm{d}x,$$

则 A_0 的所有自共轭扩张算子 A 的本质谱是空集, 即 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的.

证明 只需对满足定理条件的微分算式 (6.3.1) 所生成的最小算子 A_0 的双线性型 (A_0u,u) 作估计. 对 $\forall u(x) \in C_0^\infty(0,\infty)$ 和所有 $v=0,1,2,\cdots$ 有

$$(A_0u,u) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=0}^{s} \int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

$$(A_0u,u)_{(0,\infty)} \geqslant \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} \int_{x_v}^{x_{v+1}} a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

利用引理 6.3.1 得

$$\sum_{k=0}^{s} \int_{x_v}^{x_{v+1}} a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geqslant \left(\omega_v^{2(s-r)} \rho_{\omega_v,s}^{-1} + \sum_{k=0}^{s-1} |\omega_v|^{2(k-r)} \mu_{\omega_v,k}^{-1} \right)^{-1} ||u||_{\omega_v}^2,$$

根据 (6.3.3) 可知, 当 $v \to \infty$ 时, $\left(\omega_v^{2(s-r)} \rho_{\omega_v,s}^{-1} + \sum_{k=0}^{s-1} |\omega_v|^{2(k-r)} \mu_{\omega_v,k}^{-1} \right)^{-1} \to \infty$, 所以对充分大的 Λ, 存在充分大正整数 V, 使得当 $v > V$ 时,

$$\left(\omega_v^{2(s-r)} \rho_{\omega_v,s}^{-1} + \sum_{k=0}^{s-1} |\omega_v|^{2(k-r)} \mu_{\omega_v,k}^{-1} \right)^{-1} > \Lambda,$$

从而有 $(A_0u,u)_{(x_V,\infty)} \geqslant \Lambda ||u||_{(x_V,\infty)}^2$, 即 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_{0(x_V,\infty)}) \cap (-\infty,\Lambda) = \varnothing$. 根据算子的直和定理得 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) \cap (-\infty,\Lambda) = \varnothing$, 由于 Λ 是任取的充分大的数, 所以 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) \cap (-\infty,\infty) = \varnothing$, 于是 A_0 的所有自共轭扩张算子 A 的本质谱是空集, 即 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的. □

本定理只是微分算子谱是离散的一个充分条件, 在 6.2 节中给出几类微分算子的本质谱分布在某区间 $[\Lambda,\infty)$ 内, 也就是 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) \cap (-\infty,\Lambda) = \varnothing$, 其中 Λ 是依赖于微分算式的系数. 如果 $\Lambda \to \infty$, 则在此条件下所生成的自共轭微分算子的谱是离散的. 根据这一思想给出微分算子谱是离散的一个充分必要条件.

定理 6.3.3 若式 (6.3.1) 定义的算子 A_0 的系数 $a_k(x)$ 是实系数, 满足基本假设 (i), (ii), 并且

(1) $\sup\limits_{0<x<\infty} \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{a_n(t)} < \infty$;

(2) 存在 $X>0$, 使得 $a_k(x)\geqslant 0, x\in[X,\infty), 0\leqslant k\leqslant n-1$;

(3) 存在 $\delta>0$, 使得对固定的 $\omega>0$, 当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}\frac{\mathrm{d}t}{a_k(t)}\geqslant\delta$$

成立;

(4) $\sup\limits_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}a_k(t)\,\mathrm{d}t<\infty, 1\leqslant k\leqslant n$,

则 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充要条件为: 对确定的 ω,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}a_0(t)\,\mathrm{d}t=\infty. \tag{6.3.4}$$

证明 充分性. 由 (6.3.1) 定义的算子 A_0 的系数 $a_k(x)$ 是实系数, 并且满足条件 (i),(ii) 与 (1)~(4) 及 (6.3.4), 根据引理 6.3.1($r=0,s=n$ 的情形) 得, 对于充分大的数 K, 适当选取 ω, 存在充分大的 X, 使得当 $x>X$ 时, $u\in C^n[x,x+\omega]$, 有

$$\sum_{k=0}^{n}\int_x^{x+\omega}a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x\geqslant K\int_x^{x+\omega}|u|^2\,\mathrm{d}x,$$

从而对于 $u(x)\in C_0^\infty(X,\infty)$,

$$(A_{(X,\infty),0}u,u)\geqslant K\|u\|^2_{(X,\infty)},$$

则 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_{(X,\infty),0})\cap(-\infty,K)=\varnothing$, 其中 $A_{(X,\infty),0}$ 是算子 A_0 在区间 (X,∞) 上的限制, 即

$$A_{(X,\infty),0}u=\tau u,\quad \mathfrak{D}(A_{(X,\infty),0})=C_0^\infty(X,\infty),\quad A_0=A_{(0,X],0}\oplus A_{(X,\infty),0}.$$

根据直和算子的性质得, $\sigma_{\mathrm{e}}(A)\cap(-\infty,K)=\varnothing$. 由于 K 的任意性, 所以 $\sigma_{\mathrm{e}}(A)=\varnothing$, A 表示微分算子 A_0 的任一自共轭扩张.

必要性. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}a_0(t)\,\mathrm{d}t=\infty$ 不成立, 则存在 $\omega^*>0$ 及互不相交区间列 $\omega_v=[x_v,x_v+\omega^*](v=1,2,\cdots)$, 使

$$\sup_{v=1,2,\cdots}\int_{x_v}^{x_v+\omega^*}a_0(t)\,\mathrm{d}t<\infty,\quad x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots.$$

设 $u_1(x)\in C_0^\infty(0,+\infty)$, $\|u_1(x)\|=1, u_1(x)$ 的紧支柱包含在 ω_1 内, 令

$$u_v(x)=u_1(x-x_v+x_1),\quad v=1,2,3,\cdots,$$

则有 $(u_v, u_{v'}) = \delta_{vv'}$. 因而集合 $\{u_v\}_{v=1}^{\infty}$ 在 Hibert 空间 $H = L^2[0,\infty]$ 内非预紧的, 而由条件 (3) 可得

$$\begin{aligned}(A_0 u_v, u_v) &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\infty} a_k |u_v^{(k)}|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_v}^{x_v+\omega^*} a_k |u_v^{(k)}|^2 \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \max_{\omega_v} |u_v^{(k)}|^2 \int_{\omega_v} a_k(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \max_{\omega_1} |u_1^{(k)}|^2 \int_{\omega_v} a_k(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C_0,\end{aligned}$$

即 $\{u_v\}_{v=1}^{\infty}$ 在能量空间 H_{A_0} 中是有界的, 而 $\bar{A}$ (是 A_0 的任意自共轭扩张) 的谱是离散的, 因而有 $\{u_v\}_{v=1}^{\infty}$ 在 $H = L^2[0,\infty]$ 内是预紧的, 与 $\{u_v\}_{v=1}^{\infty}$ 非预紧矛盾. □

例 6.3.4 $A_0 u = -[(\cos x + a)u^{(3)}]^{(3)} + [(\cos x + b)u^{(2)}]^{(2)} - [(\sin x + c)u'] + (x + d)^r u$,

$$\mathfrak{D}(A_0) = C_0^{\infty}(0,\infty), \quad x \in [0,\infty].$$

当 $a > 1, b > 1, c > 1$ 及 $r > 0$ 时, 上述算子 A_0 的系数符合定理的条件, 故 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的.

例 6.3.5 在例 6.3.4 中若 $a = 1, b > 1, c > 1, r > 0$ 时, 用定理无法判定.

例 6.3.6 考虑微分算子

$$A_0 u = (-1)^n (p(x) y^{(n)})^{(n)} + q(x) y, \quad y \in \mathfrak{D}(A_0),$$

其中 $x \in [0,\infty), n > 1, \mathfrak{D}(A_0) = C_0^{\infty}(0,\infty)$, 而且

(1) $p(x) > 0, x \in [0,\infty), p(x) \in W_0^n[0,X)$, 对 $0 < X < \infty$;

(2) 对确定的 $|\omega| > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \int_x^{x+|\omega|} q(x) = \infty$.

用定理无法判定 A_0 的自共轭扩张算子谱的离散性.

在式 (6.3.1) 定义的算子 A_0 的系数 $a_k(x)$ 是正系数时还有如下的进一步的结论.

定理 6.3.7 若 (6.3.1) 定义的算子 A_0 的系数 $a_k(x)$ 是实系数, 并满足基本假设: 对 $\forall\, X, 0 < X < \infty$, $a_k(x) \in W_2^1(0,X)$, $0 \leqslant r \leqslant n$, 且

(1) 存在 $r, 1 \leqslant r \leqslant n$, 使 $a_r(x) > 0, a_k(x) \geqslant 0, x \in [0,\infty), r < k \leqslant n$;

(2) 存在 X, 当 $x > X$ 时, $a_k(x) \geqslant 0,\ 0 \leqslant k < r$;

(3) $\sup \int_x^{x+1} a_k(x)\,\mathrm{d}t < \infty$, $1 \leqslant k < n$, 则 A_0 是下半有界的, A_0 的任何自共轭

扩张的谱是离散的充要条件: 对确定的 $|\omega|$,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+|\omega|} a_0(t)\,\mathrm{d}t=\infty. \tag{6.3.5}$$

详细证明参阅 [58].

例 6.3.5、例 6.3.6 符合定理 6.3.7 的条件, 所以在例 6.3.5、例 6.3.6 中的微分算子的谱也是离散的.

以上几个结论都是关于微分算式 (6.3.1) 中的系数为正系数时所生成自共轭微分算子谱的离散性. 如果微分算式 (6.3.1) 中的系数变号或为负, 微分算式 (6.3.1) 所生成自共轭微分算子谱是否具有离散性?

定理 6.3.8　若 (6.3.1) 所定义的算子 A_0 的系数 $a_k(x)$ 是实系数, 满足基本假设 (i),(ii), 并且

(1) $\inf\limits_{0<x<\infty} a_n(x)=\alpha>0$;

(2) $\sup\limits_{0<x<\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}|a_k(t)|\,\mathrm{d}t<\infty,\ 1\leqslant k\leqslant n$;

(3) $\inf\limits_{0<x<\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}a_0^-(t)\,\mathrm{d}t>-\infty$,

则 $A_0u=\tau u(x),\mathfrak{D}(A_0)=C_0^\infty(0,\infty)$ 是下半有界的, A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充要条件为: 对确定的 ω,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega} a_0(t)\,\mathrm{d}t=\infty.$$

证明　只证充分性, 必要性的证明类似定理 6.3.7 的必要性的证明. 估计双线性型 (A_0u,u), $u(x)\in\mathfrak{D}(A_0)=C_0^\infty(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}(A_0u,u)&=\sum_{k=0}^n\int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}(x)|^2\,\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty(a_k^+(x)+a_k^-(x))|u^{(k)}|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

根据基本条件 (i)、(ii)、(2)、(3) 及引理 6.2.5 得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty a_k^-(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{v=0}^\infty\sum_{k=0}^{n-1}\int_v^{v+1}a_k^-(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\sum_{v=0}^\infty\sum_{k=0}^{n-1}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2\int_v^{v+1}a_k^-(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant-c\sum_{v=0}^\infty\sum_{k=0}^{n-1}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2\geqslant-c(\varepsilon||u^{(n)}||^2+c_\varepsilon||u||^2).\end{aligned}$$

取 ε 充分小, 使得 $\dfrac{\alpha}{2} > \varepsilon c$, 则

$$(A_0u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty |u^{(n)}(x)|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x - c_1||u||^2, \tag{6.3.6}$$

由于对确定的 ω, $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega} a_0(t)\,\mathrm{d}t = \infty$, 以及定理 6.2.3 对充分小 ε 及充分大的 b_0, 存在 X_ε 使得, 对于 $u(x) \in C_0^\infty(X_\varepsilon,\infty)$,

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^\infty |u^{(n)}(x)|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \Lambda_\varepsilon||u||^2, \tag{6.3.7}$$

其中$\Lambda_\varepsilon = \inf\limits_{0<\xi<\infty}\left[\left(\dfrac{\alpha}{2}-\varepsilon\right)\xi^{2n} - \varepsilon\xi^{2(n-1)} - \varepsilon\xi^{2(n-2)} - \cdots - \varepsilon\xi^2 + b_0 - \varepsilon\right], 0 < \varepsilon < \alpha/2.$

由 (6.3.6) 和 (6.3.7) 便得

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A_{(X_\varepsilon,\infty),0}) \cap (-\infty, \Lambda_\varepsilon - c_1) = \varnothing,$$

所以

$$\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) \cap (-\infty, \Lambda_\varepsilon - c_1) = \varnothing.$$

由于 b_0 的任意性, 故 $\sigma_{\mathrm{e}}(A_0) = \varnothing$. 充分性得证. □

根据上面定理 6.3.3、定理 6.3.7 和定理 6.3.8, 在 (6.3.1) 中如果 $n = 1, a_n(x) \equiv 1$, 我们可以得到著名的 A. M. Molchanov 判定定理.

定理 6.3.9 若二阶微分算式

$$\tau(y) = -y'' + q(x)y, \quad x \in (0,\infty) \tag{6.3.8}$$

中的 $q(x)$ 有下界, 则 $A_0u = \tau u(x)$, $\mathfrak{D}(A_0) = C_0^\infty(0,\infty)$ 是下半有界的, A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充要条件为: 对确定的 $\omega > 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega} q(t)\,\mathrm{d}t = \infty.$$

在 (6.3.1) 中, 如果 $a_n(x) \equiv 1$, $a_{n-1}(x) = a_{n-2}(x) = \cdots = a_1(x) \equiv 0, x \in (0,\infty)$, 也可以得到 A. M. Molchanov 的另一判定定理.

定理 6.3.10 若二项微分算式

$$\tau(y) = (-1)^n y^{(2n)} + q(x)y, \quad x \in (0,\infty) \tag{6.3.9}$$

中的 $q(x)$ 有下界, 则 $A_0u = \tau u(x), \mathfrak{D}(A_0) = C_0^\infty(0,\infty)$ 是下半有界的, A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充要条件: 对确定的 $\omega > 0$,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega} q(t)\,\mathrm{d}t = \infty.$$

6.3.2 Euler 微分算子谱是离散的充分必要条件

下面考虑微分算式

$$\tau u=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)x^{2k}u^{(k)}(x))^k,\quad x\in(a,\infty),a\geqslant 0 \tag{6.3.10}$$

所生成的算子的谱, 其中 $a_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 是定义在区间 (a,∞) 上的实函数. 当系数 $a_k(x)=a_k=$ 常数 $(k=1,2,\cdots,n)$ 时, 微分算式 (6.3.10) 被称为 Euler 微分算式. 在本节, 我们将给出由 (6.3.10) 所生成的自共轭 Euler 微分算子的谱是离散的充分必要条件.

为了研究方便, 在本节我们对 (6.3.10) 的系数 $a_k(x)$ 特作如下假设:

(i) $a_k(x)\in W_2^k(a,X)$, 对于 $X>a,0\leqslant k\leqslant n$;

(ii) $a_n(x)\geqslant\alpha>0$.

定理 6.3.11　设微分算子

$$A_0u=\tau u=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)x^{2k}u^{(k)}(x))^{(k)},\ \mathfrak{D}(A_0)=C_0^{\infty}(a,\infty),\quad a>0 \tag{6.3.11}$$

的系数满足基本假设 (i), (ii) 及如下条件:

(1) 存在常数 $b_k,1\leqslant k\leqslant n-1$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}\int_x^{2x}|a_k(t)-b_k|\,\mathrm{d}t=0; \tag{6.3.12}$$

(2) 设 N 是一个充分大的数, 使得

$$\sup_{x\in(a,+\infty)}\int_x^{2x}|\,(a_0(t)-N)^-\,|\,\mathrm{d}t<+\infty, \tag{6.3.13}$$

其中 $(p(x))^-=\min\{p(x),0\}$, $(p(x))^+=\max\{p(x),0\}$. 则微分算子 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}\int_x^{2x}a_0(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$$

成立.

详细证明参阅 [56].

推论 6.3.12　如果存在实数 $\alpha,-\infty<\alpha\leqslant 0$, $X>0$, $C_n>0$ 及 c_k

$$-\infty<c_k<+\infty,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

使得对于任意 $x \in (X, +\infty)$,

$$a_k(x) \leqslant c_k x^{\alpha k}, k = 1, 2, \cdots, n-1, \quad C_n x^{\alpha n} \leqslant a_n(x) \leqslant c_n x^{\alpha n},$$

则由 (6.3.10) 所生成的算子 A_0 的所有自共轭扩张的谱是离散的充分必要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1} \int_x^{2x} a_0(t) \, \mathrm{d}t = +\infty$$

成立.

例 6.3.13 若 $A_0 u = -(x^2 u')' + a_0(x) u$, $\mathfrak{D}(A_0) = C_0^{+\infty}(a, +\infty)$, 则 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} \int_x^{2x} a_0(t) \, \mathrm{d}t = +\infty$ 成立.

例 6.3.14 若 $A_0 u = (x^\beta u'')'' + a_0(x) u$, $\mathfrak{D}(A_0) = C_0^{+\infty}(a, +\infty), -\infty < \beta \leqslant 2$, 则 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充分必要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1} \int_x^{2x} a_0(t) \, \mathrm{d}t = +\infty$$

成立.

定理 6.3.11 表明微分算式 (6.3.11) 中的系数满足一定条件, 末项系数按照一定方式趋于无穷时, 所生成的自共轭微分算子的谱是离散的. 同时微分算式 (6.3.11) 中不仅末项系数按照一定方式趋于无穷能决定生成的自共轭微分算子的谱离散性, 而且微分算式 (6.3.11) 中的首项系数和中间项系数按照一定方式趋于无穷也能决定生成的自共轭微分算子的谱离散性.

定理 6.3.15 设微分算式 (6.3.11) 的系数满足基本假设 (i), (ii) 及如下条件:

(1) 存在常数 b_k 及 $p \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $k \neq p$, 使得

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1} \int_x^{2x} |a_k(t) - b_k| \, \mathrm{d}t = 0; \tag{6.3.14}$$

(2) 设 b_p 是一个充分大的数, 使得

$$\sup_{x \in (a, +\infty)} \int_x^{2x} |\,(a_p(t) - b_p)^-\,| \, \mathrm{d}t < +\infty, \tag{6.3.15}$$

其中 $(u(x))^- = \min\{u(x), 0\}, (u(x))^+ = \max\{u(x), 0\}$, 则微分算子 A_0 的任何自共轭扩张的谱是离散的充分必要条件是

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} \int_x^{2x} a_p(t) \, \mathrm{d}t = +\infty$ 成立.

详细证明参阅 [59].

§6.4 J 自共轭微分算子的本质谱

6.4.1 J 自共轭微分算子的定义

J 自共轭微分算子谱理论的研究, 始于人们对耗散 (dissaptive) 问题和具有复势能的 Schördinger 问题的研究. Simes 首先利用 Weyl 的方法研究了复系数 Sturm-Liouville 问题, 得到了类似实系数 Sturm-Liouville 问题极限点和极限圆的结论. 前苏联数学家 V. B.Lidskii, B. M.Levitan, 英国数学家 J. B. McLeod 等给出了 J 自共轭微分算子的谱的离散性 (预解算子的全连续性) 的一些结论, 同时得到了 J 自共轭微分算子的谱分析和特征理论. 进入 20 世纪 80 年代, D.Race 不仅研究了 J 对称微分算子的 J 自共轭扩张问题和亏指数问题, 而且利用多种方法对二阶、高阶 J 自共轭微分算子的谱和特征理论作了较为全面的研究, 日本的 Y. Kamimura, 法国的 J. Fleckinger, 英国数学家 D. E. Edmuns 和 W. D. Evans 等数学工作者也在不同程度上对 J 自共轭微分算子作了较为深入的研究. 在此基础上, 我们对于 J 自共轭微分算子本质谱的分布、谱的离散性给出了一些进一步的结果.

定义 6.4.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, T 是 H 中的线性算子,

$$T : \mathfrak{D}(T) \to H.$$

T 称为是 J 对称的, 如果对于 $\forall x \in \mathfrak{D}(T)$, $y \in \mathfrak{D}(T)$, 有

$$(JTJx,y) = (x, Ty),$$

其中 J 表示取复共轭, $\forall y(x) \in H, Jy = \overline{y}$.

注 复共轭线性算子 J 是一个等距算子: $\|Jy\| = \|y\|, \forall y(t) \in H$, 而且 $(Jx, Jy) = (y, x)$, $\forall x(t), y(t) \in H$.

定义 6.4.2 设 H 是一个 Hilbert 空间,

$$T : \mathfrak{D}(T) \subset H \to H$$

是一个稠定的线性算子, T 称为是 J 自共轭的, 如果

$$JTJ = T^*.$$

注 显然 J 自共轭的线性算子是 J 对称的, 但 J 对称的线性算子不一定是 J 自共轭的. 关于 J 对称, J 自共轭更一般的定义和以下结论可参阅 [8].

定理 6.4.3 J 自共轭的线性算子 T 的剩余谱是空集, 即 $\sigma_{\mathrm{r}} = \varnothing$,

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(T) = \sigma_{\mathrm{d}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{e}}(T).$$

下面主要研究如下形式的微分算式:

$$\tau u(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k([a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)]u^{(k)}(x))^{(k)},\quad x\in(0,\infty),\tag{6.4.1}$$

其中 $a_k(x), b_k(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数, 即 (6.1.6) 中的 $p_k(x)=a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)$. 以下根据 (6.4.1) 的系数研究由 (6.4.1) 生成的 J 自共轭微分算子的本质谱、离散谱. 设 T_0' 是由 (6.4.1) 生成的 J 对称微分算子, 类似 (6.2.2) 所定义.

引理 6.4.4 设 $K(T_0')=\{(T_0'f,f)|\forall f\in\mathfrak{D}(T_0'),\|f\|=1\}$, 则

$$\sigma(T_0)\subset K(T_0),\quad \Pi(T_0)\supset\mathbb{C}\backslash K(T_0).$$

引理 6.4.5 设 A 是 Hilbert 空间 H 中的稠定闭线性算子, 若

$$\lambda\notin\{(Af,f)|f\in\mathfrak{D}(A),\|f\|=1\},$$

则 $\lambda\in\Pi(A)$.

由算子直和定理可知, 研究 J 自共轭微分算子 T 的本质谱、离散谱, 只需考虑对于充分大的 N, 微分算子 T 在 $[N,\infty)$ 上的限制生成的算子 $T_{[N,\infty)}$ 的本质谱, 研究 J 自共轭微分算子 T 的本质谱的存在区域, 只需考虑 $(T_0'y,y)(y\in\mathfrak{D}(T_0'))$ 的取值范围, 从而只需考虑 $(T'_{[N,\infty)0}y,y)(y\in\mathfrak{D}(T'_{[N,\infty)0}))$ 的取值范围.

6.4.2 常系数 J 对称微分算子及其相关摄动的本质谱

在这一小节里利用分析和算子的方法研究常系数 J 对称微分算子及其在相关摄动下的本质谱的范围.

定理 6.4.6 在 (6.4.1) 中, 若系数 $a_k(x), b_k(x)$ 都是常数, 即 $a_k(x)=a_k$, $b_k(x)=b_k$, 且 a_n, $b_n>0$, 则由 (6.4.1) 生成的算子 T_0 是 J 对称算子, 其任何 J 自共轭扩张的本质谱相同, 而且包含在集合 $A\subset\mathbb{C}$ 内, 即

$$\sigma(T_0)\subset A=\{\lambda=a+\mathrm{i}b|a\in[\Lambda_1\,,\ \infty),\ b\in[\Lambda_2\,,\ \infty)\},\tag{6.4.2}$$

其中

$$\Lambda_1=\inf_{0<\zeta<\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\zeta^{2k},\quad \Lambda_2=\inf_{0<\zeta<\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k\zeta^{2k}.\tag{6.4.3}$$

证明 由 [41] 知 T_0 具有 J 自共轭扩张, 而且所有 J 自共轭扩张的本质谱相同, 等于算子 T_0 的本质谱 $\sigma(T_0)$. 对 $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ 作 Fourier 变换,

$$\hat{\varphi}(\zeta)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\zeta}\varphi(x)\mathrm{d}x,\tag{6.4.4}$$

Fourier 变换在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上等距同构且

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}(\zeta)|^2\mathrm{d}\zeta=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x, \tag{6.4.5}$$

$$(-\mathrm{i})^k\hat{\varphi}^{(k)}(\zeta)=\zeta^k\hat{\varphi}(\zeta). \tag{6.4.6}$$

对 $y(x)\in\mathfrak{D}(T_0)$, 定义 $u(x)$:

$$u(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0),\\ y(x), & x\in(0,\infty),\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(T_0y,y)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}(a_k+\mathrm{i}b_k)u^{(2k)}(x)\overline{u}(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(a_k+\mathrm{i}b_k)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0y\,,\ y)=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(a_k+mb_k)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{6.4.7}$$

上式中 $\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Im}\lambda$ 分别表示 λ 的实部和虚部. 我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0y,y)&=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(a_k+mb_k)|\hat{u}^{(k)}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(a_k+mb_k)\zeta^{2k}|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+mb_k)\zeta^{2k}\right)|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

则

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0y,y)\geqslant\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi, \tag{6.4.8}$$

其中 $\Lambda=\inf\limits_{0<\zeta<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k+mb_k)\xi^{2k}$. 根据 Fourier 变换在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上等距,

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0y,y)\geqslant\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{6.4.9}$$

(1) 当 $m\geqslant 0$ 时,

$$\Lambda=\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_k+mb_k)\xi^{2k}\geqslant\inf_{0\leqslant\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}+m\inf_{0\leqslant\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k\xi^{2k}=\Lambda_1+m\Lambda_2;$$

(2) 当 $m<0$ 时, 由 $b_n>0, a_n>0$,

$$\Lambda=\inf_{0\leqslant\xi<\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}+m\sum_{k=0}^{n}b_k\xi^{2k}\right)\geqslant\Lambda_1+m\ \sup\sum_{k=0}^{n}b_k\xi^{2k}>-\infty.$$

所以, $\sigma(T_0)$ 包含在复平面集合 $\{x+\mathrm{i}y, x+my\geqslant\Lambda\}$ 内, 由 (1),(2) 及 m 是任意实数, 我们有 $\sigma(T_0)\subset A=\{\lambda=a+\mathrm{i}b|a\in[\Lambda_1\ ,\ \infty)\ ,\ b\in[\Lambda_2,\infty)\}$. □

定理 6.4.7 在 (6.4.1) 中, 若系数 $a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)$ 满足:

(1) $a_k(x), b_k(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实值函数; $a_k(x), b_k(x)\in W_2^k(0,X)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$, 对 $\forall X>0$, 且 $a_n(x)=a_n>0$, $b_n(x)=b_n>0$;

(2) 存在常数 $a_k, b_k(k=0,1,2,\cdots,n)$, 使得

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}|a_k(t)-a_k|\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}|b_k(t)-b_k|\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

则由 τ 生成的最小算子 T_0 是一个 J 对称微分算子, T_0 的任何 J 自共轭扩张具有相同的本质谱 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)$, 且

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)\subset\{\lambda=x+\mathrm{i}y|x\in[\Lambda_1,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\},$$

其中 $\Lambda_1=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}$, $\Lambda_2=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\xi^{2k}$.

证明 由上面讨论知, 研究 T_0 的本质谱 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)$ 的范围, 归结为研究对充分大的 N, 二次型 $(T_0u,u)_{[N,\infty]}$ 的取值范围.

对 $\forall\varepsilon>0$, $m\neq0$, 由条件 (1)、(2) 知, 存在 N, 当 $X>N$ 时,

$$\int_x^{x+1}|a_k(t)-a_k|\mathrm{d}t<\varepsilon,$$

$$\int_x^{x+1}|b_k(t)-b_k|\mathrm{d}t<\varepsilon/|m|,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

对 $\forall u\in\mathfrak{D}(T_0)_{(N,\infty)}$,

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0u,u)_{[N,\infty]}=\sum_{k=0}^{n}\int_N^{\infty}[(a_k(x)+mb_k(x)u^{(k)}(x))]^{(k)}\bar{u}(x)\mathrm{d}x,\quad(6.4.10)$$

对 (6.4.10) 分部积分得

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0u,u)_{(N,\infty)}=\sum_{k=0}^{n}\int_N^{\infty}(a_k(x)+mb_k(x))|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_N^{\infty}(a_k+mb_k)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^{\infty}(a_k(x)+mb_k(x)-(a_k+mb_k))|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x$$

$$\geqslant(Bu,u)_{(N,\infty)}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^{\infty}(|a_k(x)-a_k|+|m||b_k(x)-b_k|)|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x,\quad(6.4.11)$$

则 (6.4.11) 分为两部分, 对 $\forall\varepsilon>0$, 对后一部分作估计

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^{\infty}(|a_k(x)-a_k|+|m||b_k(x)-b_k|)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\int_v^{v+1}(|a_k(x)-a_k|+|m||b_k(x)-b_k|)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2\left(\int_v^{v+1}|a_k(x)-a_k|\mathrm{d}x+\int_v^{v+1}|m||b_k(x)-b_k|\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\max_{x\in[v,\,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2(\varepsilon+\varepsilon)=\sum_{v=N}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{x\in[v,v+1]}|u^{(k)}(x)|^2\cdot 2\varepsilon,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^{\infty}(|a_k(x)-a_k|+|m||b_k(x)-b_k|)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\varepsilon\sum_{v=N}^{\infty}\|u\|^2_{\dot{c}^{n-1}(v,v+1)},\quad(6.4.12)$$

其中 $\|u\|_{\dot{c}^{n-1}(v,v+1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\max_{x\in[v\,,v+1]}|u^{(k)}(x)|$, 由引理 6.2.5 得, 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_\varepsilon$ 使得

$$\|u\|_{\dot{c}^{n-1}(v,v+1)}\leqslant\varepsilon\|u^{(n)}\|_{L_2(v,v+1)}+C_\varepsilon\|u\|_{L_2(v,v+1)},$$

则 (6.4.12) 可化为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^{\infty}+|a_k(x)-a_k|+|m||b_x(x)-b_k||u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\varepsilon\sum_{v=N}^{\infty}(\varepsilon\|u^{(n)}\|_{L_2(v,v+1)}+C_\varepsilon\|u\|_{L_2(v,v+1)})^2$$

$$\leqslant 2\varepsilon(\varepsilon\|u^{(n)}\|_{L_2(N,\infty)}+C_\varepsilon\|u\|_{L_2(N\,,\,\infty)})^2.$$

由 ε 的任意性, N 充分大时 $(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0u,u)_{(N,\infty)}\geqslant(Bu,u)_{[N,\infty)}$, 其中

$$(Bu,u)_{(N,\infty)}=\sum_{k=0}^{n}\int_N^{\infty}(a_k+mb_k)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x.$$

由引理 6.4.4 得 $(Bu,u)_{(N,\infty)}\geqslant\Lambda(u,u)$, 其中 Λ 由 (6.4.9) 所定义. 于是

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)\subset\{\lambda=x+\mathrm{i}y|x\in[\Lambda_1,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\},$$

在此 Λ_1, Λ_2 由定理 6.4.6 中 (6.4.3) 所定义.

6.4.3 常系数 J 自共轭 Euler 微分算子及其相关摄动的本质谱

本节研究微分算式

$$\tau u(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^{2k}[a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)]u^{(k)}(x))^{(k)},\quad x\in(0,\infty)\tag{6.4.13}$$

生成的 J 自共轭微分算子的本质谱的存在区域, 其中 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实函数, 即 (6.1.6) 中的 $p_{n-k}(x)=x^{2k}(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))$.

定理 6.4.8 在 (6.4.3) 中, 若系数 $a_k(x),b_k(x)$ 都是常值函数, 即 $a_k(x)=a_k$, $b_k(x)=b_k$, a_k, b_k $(k=0,1,\cdots,n)$, 均为常数 (在此情形下,(6.4.3) 称为 Euler 微分算式, 生成的算子称为 Euler 微分算子); 而且 $a_n>0,b_n>0$; 则由 (6.4.13) 生成的算子 T_0 是 J 对称算子, 其任何 J 自共轭扩张具有相同的本质谱, 均包含在集合

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)\subset\{\lambda=x+\mathrm{i}y\,|x\in[\Lambda_1,\infty),y\in[\Lambda_2,\infty)\}\tag{6.4.14}$$

内, 其中

$$\begin{cases}\Lambda_1=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\prod\limits_{j=1}^{k}\left[\xi^2+\left(j-\dfrac{1}{2}\right)^2\right],\\ \Lambda_2=\inf\limits_{0<\xi<\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\prod\limits_{j=1}^{k}\left[\xi^2+\left(j-\dfrac{1}{2}\right)^2\right].\end{cases}\tag{6.4.15}$$

详细证明参阅 [59].

定理 6.4.9 在 (6.4.3) 中, 若系数 $p_k(x)=(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))x^{2k}$ 中的 $a_k(x),b_k(x)$ 满足如下条件: $b_k(x)\in W_2^k[0,X]$, $0\leqslant k\leqslant n$,

$$a_n(x)\equiv a_n>0,\quad b_n(x)\equiv b_n>0,\quad x\in(0,\infty);$$

存在常数 a_k,b_k $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 使得

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}\displaystyle\int_x^{2x}|a_k(t)-a_k|\,\mathrm{d}t=0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}x^{-1}\displaystyle\int_x^{2x}|b_k(t)-b_k|\,\mathrm{d}t=0,\end{cases}\tag{6.4.16}$$

则由 (6.4.3) 生成的最小算子 T_0 是一个 J 对称微分算子, T_0 的任何 J 自共轭扩张具有相同的本质谱 $\sigma_{\rm e}(T_0)$, 而且

$$\sigma_{\rm e}(T_0) \subset \{\lambda = x + {\rm i}y | x \in [\Lambda_1, \infty), y \in [\Lambda_2, \infty)\},$$

其中 Λ_1, Λ_2 由 (6.4.15) 所定义.

详细证明参见 [53].

6.4.4 具有可积系数的二阶 J 对称微分算子的本质谱

本节研究由微分算式

$$l(y) = -(p(x)y')' + q(x)y, \quad x \in (a, +\infty) \tag{6.4.17}$$

所确定的 T_0 生成的 J 自共轭 Sturm-Liouville 微分算子的本质谱、离散谱的存在范围, 其中系数 $p(x) = p_1(x) + {\rm i}p_2(x)$, $q(x) = q_1(x) + {\rm i}q_2(x)$, $x \in (a, +\infty)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ 是定义在 $(a, +\infty)$ 上的实函数.

定理 6.4.10 若 (6.3.2) 的系数 $p(x) = p_1(x) + {\rm i}p_2(x)$, $q(x) = q_1(x) + {\rm i}q_2(x)$, $x \in (a, +\infty)$ 满足如下条件:

(1) $p_j(x) > 0, x \in (a, +\infty)(j = 1, 2)$, 而且 $\dfrac{1}{p_j(x)} \in L(a, +\infty)$ $(j = 1, 2)$;

(2) $|q_j(x)| \in L(a, +\infty)$ $(j = 1, 2)$,

则存在常数 $c_1 = c_1(p_1, q_1)$, $c_2 = c_2(p_2, q_2)$, 使得 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱 $\sigma_{\rm e}(T)$ 包含在 Ω 内, 即 $\sigma_{\rm e}(T) \subset \Omega$, 其中 $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} | {\rm Re}\lambda \geqslant c_1, {\rm Im}\lambda \geqslant c_2\}$.

证明 要确定 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱的存在范围, 只需确定二次型 $(T_0y, y)(y \in \mathfrak{D}(T_0), \|y\| = 1)$ 的取值范围.

$$(T_0y, y) = \int_a^{+\infty} [-(py')'\bar{y} + qy\bar{y}]{\rm d}x, \quad \forall y \in \mathfrak{D}(T_0).$$

对上式分部积分得

$$(T_0y, y) = \int_a^{+\infty} (p|y'|^2 + q|y|^2){\rm d}x, \quad \forall y \in \mathfrak{D}(T_0), \tag{6.4.18}$$

则对 $\forall y \in \mathfrak{D}(T_0)$,

$${\rm Re}(T_0y, y) = \int_a^{+\infty} (p_1|y'|^2 + q_1|y|^2){\rm d}x,$$

$${\rm Re}(T_0y, y) \geqslant \int_a^{+\infty} p_1|y'|^2{\rm d}x - \int_a^{+\infty} |q_1||y|^2{\rm d}x. \tag{6.4.19}$$

由条件 (1),(2) 中系数的可积性知: 存在充分小的 $\omega > 0$, 使得

$$\int_t^{t+\omega} p_1^{-1}\mathrm{d}x \int_t^{t+\omega} |q_1|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}. \tag{6.4.20}$$

对 $\forall t \in (a, +\infty)$ 恒成立. 利用引理 6.2.11 对 (6.4.19) 进行估计, 令 $m_1 = \int_a^{\infty} |q_1|\mathrm{d}x$, 则

$$\mathrm{Re}(T_0y, y) \geqslant \sum_{v=0}^{\infty} \int_{a+v\omega}^{a+(v+1)\omega} (p_1|y'|^2 - |q_1||y|^2)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{Re}(T_0y, y) \geqslant \sum_{v=0}^{\infty} \int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 - |q_1|)|y|^2\mathrm{d}x, \tag{6.4.21}$$

其中 $\omega_v = (a + v\omega, a + (v+1)\omega]$, 而且 $|\omega_v| = \omega(v = 1, 2, \cdots)$. 根据 ω 的选取以及引理 6.2.11 得下面估计:

$$\int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 + |q_1||y|^2)\mathrm{d}x \geqslant \mu_{\omega_v}\left(1 + |\omega|\mu_{\omega_v}\int_{\omega_v} p_1^{-1}\mathrm{d}x\right)^{-1} \|y\|_{\omega_v}^2, \tag{6.4.22}$$

其中 $\mu_{\omega_v} = \frac{1}{|\omega|}\int_{\omega_v} -|q_1|\mathrm{d}x$, $\|y\|_{\omega_v}^2 = \int_{\omega_v} |y|^2\mathrm{d}x$, 从而

$$\int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 + |q_1||y|^2)\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{\omega}\int_{\omega_v} |q_1|\mathrm{d}x\left(1 - \int_{\omega_v} |q_1|\mathrm{d}x \int_{\omega_v} p_1^{-1}\mathrm{d}x\right)^{-1} \|y\|_{\omega_v}^2,$$

$$\int_{\omega_v} (p_1|y'|^2 + |q_1||y|^2)\mathrm{d}x \geqslant -\frac{2m_1}{\omega}\|y\|_{\omega_v}^2 = c_1\|y\|_{\omega_v}^2, \tag{6.4.23}$$

其中 $c_1 = c_1(p_1, q_1) = -\frac{2m_1}{\omega}$, 把 (6.4.23) 代入 (6.4.21) 得

$$\mathrm{Re}(T_0y, y) \geqslant \sum_{v=0}^{\infty} c_1\|y\|_{\omega_v}^2 = c_1\|y\|^2. \tag{6.4.24}$$

同理可得

$$\mathrm{Im}(T_0y, y) \geqslant \sum_{v=0}^{\infty} c_2\|y\|_{\omega_v}^2 = c_2\|y\|^2, \tag{6.4.25}$$

其中 $c_2 = c_2(p_2, q_2) = -\frac{2m_2}{\omega'}$, $m_2 = \int_a^{\infty} |q_2|\mathrm{d}x$, 而 $\omega' > 0$, 使得

$$\int_t^{t+\omega'} p_2^{-1}\mathrm{d}x \int_t^{t+\omega'} |q_2|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{6.4.26}$$

对 $\forall t \in (a, +\infty)$ 恒成立. 由 (6.4.24) 和 (6.4.25) 得到 $K(T_0) \subset \Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\lambda \geqslant c_1, \mathrm{Im}\lambda \geqslant c_2\}$, 利用引理 6.4.4 便得结论. □

推论 6.4.11 若 (6.4.17) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$, $x\in(a,+\infty)$ 满足定理 6.4.10 的假设, 则存在常数 $c_1=c_1(p_1,q_1)$, $c_2=c_2(p_2,q_2)$, 使得 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 在区域 $\mathbb{C}\backslash\Omega$ 内只有离散谱, 其中 $\Omega=\{\lambda\in\mathbb{C}|\mathrm{Re}\lambda\geqslant c_1,\mathrm{Im}\lambda\geqslant c_2\}$.

类似得到下面结论 [49]:

定理 6.4.12 设函数

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)',p_1,p_2,\cdots,p_n$$

在区间 $[a,\infty)$ 上可积, 且 $\mathrm{Im}(p_0(x))\equiv 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p_0(x)>0$, 则方程

$$(-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)}+(-1)^{n-1}(p_1y^{(n-1)})^{(n-1)}+\cdots+p_ny=\lambda y \tag{6.4.27}$$

存在这样的 $2n$ 个线性无关的 $y_1,y_2,\cdots,y_{2n}$; 当 $x\to\infty$ 时, 它们的渐近性状如下:

$$y_k=\mathrm{e}^{\mu_k\xi}[1+o(1)],\quad k=1,2,\cdots,2n, \tag{6.4.28}$$

其中 $\mu_k(-1)^n$ 是 λ 的所有不同的 $2n$ 次方根, 其实部各不相同, $\xi=\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(t)}}\mathrm{d}t$, 而且由 (6.4.7) 生成的最小算子是 J 对称算子, 其亏指数等于 n.

定理 6.4.13 若 (6.4.17) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$, $x\in(a,+\infty)$ 满足如下条件:

$$p_1(x)>0,p_2(x)\equiv0,x\in(a,+\infty),\quad \lim_{x\to\infty}p_1(x)>0,$$

$$\left(\frac{1}{p_1(x)}\right)'\in L(a,+\infty),\ |q_j(x)|\in L(a,+\infty),\quad j=1,2,$$

则由 (6.4.17) 生成的 J 对称算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱充满正实轴, 即 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)=\mathbb{R}^+=[0,\infty)$; 而在在区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内只有 T 的离散谱.

证明 根据定理 6.4.12 得: 对 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, 方程

$$-(p(x)y'(x))'+q(x)y(x)=\lambda y(x)$$

有两个线性无关的 y_1,y_2; 当 $x\to\infty$ 时, 它们的渐近性状如下:

$$y_k=\mathrm{e}^{\mu_k\xi}[1+o(1)],\quad k=1,2, \tag{6.4.29}$$

其中 μ_k 是 λ 的两个不同的二次方根, 其实部不相同, $\xi=\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\sqrt{p_1(t)}}\mathrm{d}t$, 而且由 (6.4.17) 生成的 J 对称算子 T_0 的亏指数等于 1. 令 $s=|\lambda|^{\frac{1}{2}}$, 则 $\mu_k=s\omega_k,(s\omega_k)^2=$

$-\lambda,\ k=1,2$, 从而当 $x\to\infty$ 时,

$$y_k=\mathrm{e}^{s\xi\omega_k}[1+o(1)],\quad k=1,2.$$

下面根据上式来确定 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱.

(1) 当 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$, 而 $\arg\lambda=0$ 时, $\mu_1=s\mathrm{i},\mu_2=-s\mathrm{i}$, 则有 $y_1,y_2\notin L^2(a,\infty)$; 由此说明 $\lambda\notin\Pi(T_0)$, 而且 y_1,y_2 的任何线性组合都不属于 $L^2(a,\infty)$, 因此 λ 属于 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱, 即 $\mathbb{R}^+\subset\sigma_{\mathrm{e}}(T)$;

(2) 当 $\mathrm{Re}\lambda>0$, 而 $0<\arg\lambda<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $\dfrac{\pi}{4}<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{4}<\theta_2<\dfrac{3\pi}{2}$, 则有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty),y_2$ 是某一 J 自共轭扩张 T 的特征值所对应的特征函数;

(3) 当 $\mathrm{Re}\lambda>0$, 而 $-\dfrac{\pi}{2}<\arg\lambda<0$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta_1<-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}<\theta_2<\dfrac{3\pi}{4}$, 则有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$, y_2 是某一 J 自共轭扩张 T 的特征值所对应的特征函数;

(4) 当 $\mathrm{Re}\lambda=0$, $\arg\lambda=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 而 $\theta_1=\pm\dfrac{\pi}{4}$, $\theta_2=\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, 则有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$, y_2 是某一 J 自共轭扩张 T 的特征值所对应的特征函数;

(5) 当 $\mathrm{Re}\lambda<0$, 而 $\arg\lambda=\pi$ 时, $\mu_1=s$, $\mu_2=-s$, 则有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$, y_2 是某一 J 自共轭扩张 T 的特征值所对应的特征函数;

(6) 当 $\mathrm{Re}\lambda<0$, 而 $\dfrac{\pi}{2}<\arg\lambda<\pi$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $0<\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$, $\pi<\theta_2<\dfrac{5\pi}{4}$, 则有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$, y_2 是某一 J 自共轭扩张 T 的特征值所对应的特征函数;

(7) 当 $\mathrm{Re}\lambda<0$, 而 $-\pi<\arg\lambda<-\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mu_1=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $\mu_2=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, $-\dfrac{\pi}{4}<\theta_1<0$, $\dfrac{3\pi}{4}<\theta_2<\pi$, 则有 $y_1\notin L^2(a,\infty)$, $y_2\in L^2(a,\infty)$, y_2 是某一 J 自共轭扩张 T 的特征值所对应的特征函数.

根据 (1)~(7) 的讨论可知: 区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内的任意点 λ 可能是 T_0 的某一 J 自共轭扩张 T 的特征值, 又因为 T_0 的任何 J 自共轭扩张都具有相同的本质谱, 故 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)=\mathbb{R}^+=[0,\infty)$.

推论 6.4.14 若 (6.4.17) 的系数 $q(x)=q_1(x)+\mathrm{i}q_2(x)$, $x\in(a,+\infty)$ 满足定理 6.4.13 的假设, 而且 $p(x)\equiv 1$, $x\in(a,+\infty)$, 则由 (6.4.17) 生成的 J 对称算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱充满正实轴, 即 $\sigma_{\mathrm{e}}(T)=\mathbb{R}^+=[0,\infty)$; 而在区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内只有 T 的离散谱.

推论 6.4.15　若 (6.4.17) 的系数 $q_2(x) \equiv 0$, $x \in (a,+\infty)$, $q(x) = q_1(x)$ 在区间 (a,∞) 上可积, 而且 $p(x) \equiv 1$, $x \in (a,+\infty)$, 则由 (6.4.17) 生成的 J 对称算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张 T 的本质谱充满正实轴, 即 $\sigma_{\mathrm{e}}(T) = \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$; 而在区域 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ 内只有 T 的离散谱.

§6.5　J 自共轭微分算子谱的离散性

6.5.1　高阶 J 自共轭微分算子谱离散的充分条件

引理 6.5.1　设 A 是 Hilbert H 中的稠定闭线性算子, 若 A 的预解算子全连续, A 的谱是离散的; 若 A 是自共轭算子, 上述结论的逆也成立.

引理 6.5.2　设 L_1, L_2 是 Hilbert H 中的稠定闭线性算子, 满足

(a) L_1, L_2 是对称的、半有界算子;

(b) $\mathfrak{D}(L_1) = \mathfrak{D}(L_2)$;

(c) 对某复数 λ_0, 集合 $\mathcal{R}(L_1 + \mathrm{i}L_2 - \lambda_0 I)$、$(\mathcal{R}(L_1 - \mathrm{i}L_2 - \lambda_0 I))$ 在 Hilbert 空间 H 内是稠密的;

(d) 对称算子 $L_1 + L_2$ 的 Friedrichs 扩张算子的预解算子是全连续的,

则算子 $L = L_1 + \mathrm{i}L_2$ $(L = L_1 - \mathrm{i}L_2)$ 的闭包 $\overline{L}$ 满足: 当 $\lambda_0 \in \rho(\overline{L})$ 时, $(\overline{L} - \lambda_0 I)^{-1}$ 是全连续算子.

定理 6.5.3　若 A 是 J 自共轭算子, 则 $\Pi(A) = \rho(A)$.

下面给出几类微分算子, 其系数 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 满足一定条件时, 其谱是离散的.

定理 6.5.4　微分算式 (6.4.1) 的系数 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 若满足如下条件:

(1) 系数 $b_k(x)$, $k = 0,1,\cdots,n$, 满足定理 6.4.7 的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x > N_1$ 时, $a_k(x) \geqslant 0$, $k = 0,1,\cdots,n$, $a_n(x) \geqslant a > 0$, 而且

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} a_0(x)\mathrm{d}x = \infty, \tag{6.5.1}$$

则由 (6.4.1) 生成的 J 对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J 自共轭算子的谱是离散的.

证明　研究 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)$ 的存在范围可归结为研究二次型 $(T_0u,u)_{[N,\infty)}$ 的取值范围, 对充分大的 N, $u \in \mathfrak{D}(T_0)_{(N,\infty)}$, 所以

$$(\mathrm{Re} + m\mathrm{Im})(T_0u,u)_{(N,\infty)} = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\infty}[(a_k(x) + mb_k(x))u^{(k)}(x)]^{(k)}\bar{u}(x)\mathrm{d}x. \tag{6.5.2}$$

对 (6.5.2) 分部积分得

$$(\mathrm{Re} + m\mathrm{Im})(T_0u,u)_{(N,\infty)} = \sum_{k=0}^{n}\int_N^{\infty}(a_k(x) + mb_k(x))|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x, \tag{6.5.3}$$

在 (6.5.3) 中, 首先估计 $\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty a_k(x)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x$, 由条件 (2) 知, 对 $\forall\varepsilon>0$ 及任意大的 b_0, 存在 N_2, 使得当 $X>N_2$ 时, $\int_x^{x+1}a_0(t)\mathrm{d}t\geqslant b_0$. 取 $N_0=\max\{N_1, N_2\}$, 当 $N>N_0$ 时, 由定理 6.2.3 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x \geqslant&\alpha\int_N^\infty|u^{(n)}|^2\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1}\int_N^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\&+\int_N^\infty u_0(x)|u|^2\mathrm{d}x\\\geqslant&\alpha\int_N^\infty|u^{(n)}|\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty\varepsilon|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\&+b_0\int_N^\infty|u|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_N^\infty|u|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty(a_0(x)-b_0)|u|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\geqslant\mu_\varepsilon\|u\|^2+\varepsilon\int_N^\infty|u|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty(a_0(x)-b_0)|u|^2\mathrm{d}x,\quad(6.5.4)$$

其中 $\mu_\varepsilon=\inf\limits_{0<\zeta<\infty}(\alpha\zeta^{2n}-\varepsilon\zeta^{2(n-1)}-\cdots-\varepsilon\zeta^2+b_0)$. 由引理 6.2.11 对 (6.5.4) 右端第二项作估计,

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_N^\infty|u|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty(a_0(x)-b_0)|u|^2\mathrm{d}x\geqslant\sum_{v=N}^{\infty}\int_v^{v+1}(\varepsilon|u|^2+(a_0(x)-b_0)(u)^2)\mathrm{d}x\\&\geqslant\sum_{v=N}^{\infty}\Big[\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\Big(1+\int_c^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\int_v^{v+1}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}x\Big)^{-1}\Big]\|u\|^2_{(v,v+1)},\end{aligned}$$

$$\varepsilon\int_N^\infty|u|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty(a_0(x)-b_0)|u|^2\mathrm{d}x\geqslant 0.\quad(6.5.5)$$

利用 (6.5.4) 和 (6.5.5),(6.5.3) 可化为

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0u,u)_{(N,\infty)}\geqslant\mu_\varepsilon\|u\|^2+m\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty b_k(x)|u^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x,\quad(6.5.6)$$

其中 $\mu_\varepsilon=\inf\limits_{0<\xi<\infty}(\alpha\xi^{2n}-\varepsilon\xi^{2(n-1)}-\cdots-\varepsilon\xi^2+b_0)$, 由 ε 任意小及 b_0 的任意大性知, 在 (6.5.6) 中 $\mu_\varepsilon\to+\infty$, 从而有

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)\subset\{x+\mathrm{i}y|x\in[\mu_\varepsilon,\infty),\ y\in[\Lambda_2,\infty)\},$$

其中 Λ_2 与定理 6.4.6 中 Λ_2 相同, 由于 $\mu_\varepsilon\to\infty$, 故 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)=\varnothing$, 因此 T_0 的本质谱是空集. T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的.

定理 6.5.5　微分算式 (6.4.1) 的系数 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 若满足如下条件:

(1) 系数 $a_k(x)$, $k=0,1,\cdots,n$, 满足定理 6.4.7 的假设;

(2) 存在 N_1^1, 当 $x>N_1^1$ 时, $b_k(x)\geqslant 0\,(k=0,1,\cdots,n)$, $b_n(x)\geqslant\beta>0$, 而且

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}b_0(t)\mathrm{d}t=\infty, \tag{6.5.7}$$

则由 (6.4.1) 生成的 J 对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J 自共轭算子的谱是离散的.

证明　同定理 6.5.4, 只需考虑 $(m\mathrm{Re}+\mathrm{Im})(T_0,u)_{(N,\infty)}$ 即可.

定理 6.5.6　在 (6.4.13) 中, 若系数 $p_k(x)=(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))x^{2k}$ 中的 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $b_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$, 满足定理 6.4.8 中的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x>N_1$ 时, $a_k(x)\geqslant 0(k=0,1,\cdots,n)$, 而且 $a_n(x)\geqslant\alpha>0$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1}a_0(t)\mathrm{d}t=+\infty$,

则由 (6.4.13) 生成的 J 对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J 自共轭算子的谱是离散的, $\sigma(\overline{T_0})=\sigma_{\mathrm{d}}(\overline{T_0})$

证明　由上面讨论可知: 研究 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)$ 的存在范围可归结为: 对充分大的 N, 当 $u\in\mathfrak{D}(T_0)_{(N,\infty)}$, 且 $\|u\|=1$ 时, 确定二次型 $(T_0'u,u)_{(N,\infty)}$ 的取值范围, 其中 $\mathfrak{D}(T_0)_{(N,\infty)}=C_0^\infty(N,\infty)\cap\mathfrak{D}(T)$.

$$(T_0'u,u)_{(N,\infty)}=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty(-1)^k[(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))x^{2k}u^{(k)}]^{(k)}\,\bar{u}\,\mathrm{d}x,$$

$$(T_0'u,u)_{(N,\infty)}=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x. \tag{6.5.8}$$

对 $\forall m\in\mathbb{R}$, $m\neq 0$, 有

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0'u,u)_{(N,\infty)}=\sum_{k=0}^n\int_N^\infty(a_k(x)+mb_k(x))x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x, \tag{6.5.9}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0'u,u)_{(N,\infty)}=&\sum_{k=0}^n\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\&+m\sum_{k=0}^n\int_N^\infty b_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

在 (6.5.11) 中, 首先估计第一项, 由条件 (2) 和 (3) 知, 对 $\forall\varepsilon>0$, 及任意大

的 b_0, 存在 N_2, 使得当 $x > N_2$ 时, $\int_x^{x+1} a_0(t)\mathrm{d}t \geqslant b_0$; 取 $N_0 = \max(N_1, N_2)$, 当 $N > N_0$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\ \geqslant&\alpha\int_N^\infty x^{2n}|u^{(n)}|^2\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty a_0(x)\left|u\right|^2\mathrm{d}x\\ \geqslant&\alpha\int_N^\infty x^{2n}|u^{(n)}|^2\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty \varepsilon\, x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\\ &+\int_N^\infty b_0\left|u\right|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty \varepsilon\, x^2\left|u'\right|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty (a_0(x)-b_0)\left|u\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty a_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x\geqslant&\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty C_kx^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty \varepsilon\, x^2\left|u'\right|^2\mathrm{d}x\\ &+\int_N^\infty (a_0(x)-b_0)\left|u\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{6.5.11}$$

其中 $C_0=\alpha C_k=-\varepsilon(k=1,2,\cdots,n-1,\ c_0=b_0)$. 下面对 (6.5.11) 中的最后两项作估计, 由引理 6.2.11 得

$$\begin{aligned}&\int_N^\infty \varepsilon\, x^2\left|u'\right|^2\mathrm{d}x+\int_N^\infty (a_0(x)-b_0)\left|u\right|^2\mathrm{d}x\\ =&\sum_{v=N}^{\infty}\int_v^{v+1}(\varepsilon\, x^2\left|u'\right|^2\mathrm{d}x+(a_0(x)-b_0)\left|u\right|^2)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\sum_{v=N}^{\infty}\left[\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\left(1+\int_v^{v+1}(a_0(x)-b_0)\mathrm{d}x\int_v^{v+1}(\varepsilon x)^{-2}\mathrm{d}x\right)^{-1}\right]||u||^2_{(v,v+1)}\geqslant 0,\tag{6.5.12}$$

利用 (6.5.11) 和 (6.5.12), 对 (6.5.10) 作如下估计:

$$(\mathrm{Re}+m\mathrm{Im})(T_0'u,u)_{(N,\infty)}\geqslant\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty C_kx^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x+m\sum_{k=0}^{n}\int_N^\infty b_k(x)x^{2k}|u^{(k)}|^2\mathrm{d}x,\tag{6.5.13}$$

所以

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)\subset\{x+\mathrm{i}y|\, x\in[\Lambda_\varepsilon,+\infty),\ y\in[\Lambda_2,+\infty)\},$$

其中 Λ_2 同 (6.4.15), 而 Λ_ε 具有如下表达式:

$$\Lambda_\varepsilon=\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{\infty}C_k\prod_{j=1}^{k}\left[\xi^2+\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right],\tag{6.5.14}$$

上式中, $C_0=\alpha>0$, $C_k=-\varepsilon\,(k=1,2,\cdots,n-1)$, $c_0=b_0$, 由 b_0 是充分大的数, b_0 的任意性得 $\Lambda_\varepsilon\to+\infty$, 所以 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_0)=\varnothing$, 故 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J 自共轭算子的谱是离散的. □

定理 6.5.7　在 (6.4.13) 中, 若系数 $p_k(x)=(a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x))x^{2k}$ 中的 $a_k(x)$, $b_k(x)$ 满足如下条件:

(1) $a_k(x)\,(k=0,1,\cdots,n)$, 满足定理 6.4.8 中的假设;

(2) 存在 N_1, 当 $x>N_1$ 时, $b_k(x)\geqslant 0(k=0,1,\cdots,n)$, 而且 $b_n(x)\geqslant\alpha>0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_x^{x+1}b_0(t)\mathrm{d}t=+\infty$,

则由 (6.4.13) 生成的 J 对称算子 T_0 的本质谱是空集, 即由 T_0 生成的任何 J 自共轭算子的谱是离散的, $\sigma(\overline{T}_0)=\sigma_{\mathrm{d}}(\overline{T}_0)$.

证明同定理 6.5.6.

定理 6.5.8　在 (6.4.1) 中系数 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ 满足 $p_k(x)=a_k(x)+\mathrm{i}b_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$, 其中 $a_k(x),b_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 是定义在区间 $[1,\infty)$ 上的实函数, 而且

(1) 若 $a_k(x),b_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 不恒等于零, $a_k(x),b_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 是 x 的实数次幂的和, $a_k(x)=c_kx^{n(k)}+$ 低阶项, $c_k>0$, $k=0,1,\cdots,n$, $b_k(x)=d_kx^{m(k)}+$ 低阶项, $d_k>0$, $k=0,1,\cdots,n$;

(2) 若 $a_k(x)$, $b_s(x)$ 不恒等于零, 且 $k\neq s$, 则 $n(k)-2k\neq m(s)-2s$;

(3) 设 $k^*=\max\{n(k)-2k\}$, 且 $s^*=\max\{m(s)-2s\}$, 若存在且仅存在一个 k 和一个 s 使得 $k^*=n(k)-2k$, $s^*=m(s)-2s$;

(4) $\max\{m(0),n(0)\}>0$, $\max\{m(1),n(1)\}>2$,

则算子 T_0 是极限点型的; 而且 (6.4.1) 的任何 J 自共轭扩张算子 T 的谱是离散的.

证明　算子 T_0 是极限点型的证明见 [53]. 下面证明 (6.4.1) 的任何 J 自共轭扩张算子 T 的谱是离散的. 对 (6.4.1) 进行分解,

$$\tau_1y=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(a_k(x)y^{(k)})^{(k)},\quad x\geqslant 1,\tag{6.5.15}$$

$$\tau_2y=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(b_k(x)y^{(k)})^{(k)},\quad x\geqslant 1,\tag{6.5.16}$$

设 T_{10},T_{20},T_0 是分别由微分算式 τ_1,τ_2,τ 生成的最小算子, 即

$$T_{10}f=\tau_1(f),\quad\forall f\in\mathfrak{D}(T_{10})=C_0^\infty[1,\infty),\tag{6.5.17}$$

$$T_{20}f=\tau_2(f),\quad\forall f\in\mathfrak{D}(T_{20})=C_0^\infty[1,\infty),\tag{6.5.18}$$

$$T_0 f = \tau(f), \quad \forall f \in \mathfrak{D}(T_0) = C_0^\infty[1,\infty). \tag{6.5.19}$$

下面只需证明 T_{10}, T_{20}, T_0 满足引理 6.5.2 的条件 (a)~(d) 即可. 根据定理的条件可知 T_{10}, T_{20}, T_0 是稠定的, 对称算子; 又根据条件 (1) 得到：存在常数 $\gamma_i > -\infty (i=1,2)$, 使得

$$(T_{10}y, y) > \gamma_1 \|y\|^2, \quad y \in \mathfrak{D}(T_{10}), \tag{6.5.20}$$

$$(T_{20}y, y) > \gamma_2 \|y\|^2, \quad y \in \mathfrak{D}(T_{20}), \tag{6.5.21}$$

从而 T_{10}, T_{20} 是下半有界的, 满足引理 6.5.2 的条件 (a) 和 (b). 由上述讨论可知, T_{10}, T_{20} 是下半有界的, 所以 T_{10}, T_{20} 的正则点集非空, 即 $\Pi(T_{10}) \neq \varnothing, \Pi(T_{20}) \neq \varnothing$. 又因为 $T_0 = T_{10} + \mathrm{i}T_{20}$, 则 $\Pi(T_0) \neq \varnothing$, $\Pi(T_1) \neq \varnothing$. 若 T 是 T_0 的一个 J 自共轭扩张算子, 由定理 6.5.3 可知, $\Pi(T) = \rho(T)$, 所以 $\rho(T) \neq \varnothing$. 对于 $\forall \lambda \in \rho(T)$, 集合 $\mathcal{R}(T - \lambda I)$(值域) 在 $L^2[1,\infty)$ 内稠密, 所以引理 6.5.2 的条件 (c) 亦满足.

下面考虑算子 $T_{10} + T_{20}$, $\mathfrak{D}(T_{10}) = \mathfrak{D}(T_{20}) = \mathfrak{D}(T_{10} + T_{20})$, 对于任意的 $y \in \mathfrak{D}(T_{10}) = \mathfrak{D}(T_{20}) = \mathfrak{D}(T_{10} + T_{20})$, 有

$$(T_{10} + T_{20})y = \tau_1 y + \tau_2 y = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k [(a_k(x) + b_k(x))y^{(k)}]^{(k)},$$

由条件 (1) 可知, 存在 $X > 1$, 使得当 $x \in [X, \infty)$ 时,

$$a_k(x) + b_k(x) \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{6.5.22}$$

用 $(T_{10} + T_{20})_{[1,X]}$, $(T_{10} + T_{20})_{[X,\infty)}$ 分别表示 $(\tau_1 + \tau_2)y$ 在对应区间 $[1, X]$, $[X, \infty)$ 上的最小算子; 用 $T_1 + T_2$, $(T_1 + T_2)_{[1,X]}$, $(T_1 + T_2)_{[X,\infty)}$ 分别表示 $T_{10} + T_{20}$, $(T_{10} + T_{20})_{[1,X]}$, $(T_{10} + T_{20})_{[X,\infty)}$ 的 Friedrichs 自共轭扩张, 则

$$(T_{10} + T_{20})_{[1,X]} y = (\tau_1 + \tau_2)y, \quad y \in \mathfrak{D}((T_{10} + T_{20})_{[1,X]}) = C_0^\infty[1, X],$$

$$(T_{10} + T_{20})_{[X,\infty)} y = (\tau_1 + \tau_2)y, \quad y \in \mathfrak{D}((T_{10} + T_{20})_{[X,\infty)}) = C_0^\infty[X, \infty),$$

$$T_1 + T_2 = (T_1 + T_2)_{[1,X]} \oplus (T_1 + T_2)_{[X,\infty)}. \tag{6.5.23}$$

由上面分解及定理的条件可知, $(T_{10} + T_{20})_{[1,X]}$ 是一个正则算子, 从而

$$\sigma_{\mathrm{e}}((T_{10} + T_{20})_{[1,X]}) = \varnothing,$$

所以

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_{10} + T_{20}) = \sigma_{\mathrm{e}}((T_{10} + T_{20})_{[X,\infty)}),$$

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_1+T_2)=\sigma_{\mathrm{e}}((T_1+T_2)_{[X,\infty)}).$$

考虑算子 $(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}$, 对于 $\forall y\in\mathfrak{D}((T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)})$,

$$(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}y=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k[(a_k(x)+b_k(x))y^{(k)}]^{(k)}.$$

当 X 取的充分大时, 由 (6.5.22) 及定理的条件 (4), 取 $s=1$, 及分划 $Z=\{x_1=X, x_2=X+1,\cdots,x_{n+1}=X+n,\cdots\}$, 则算子 $(T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)}$ 的系数 $a_k(x)+b_k(x)$ 满足引理 6.5.2 的条件, 所以 $\sigma_{\mathrm{e}}(T_{10}+T_{20})=\sigma_{\mathrm{e}}((T_{10}+T_{20})_{[X,\infty)})=\varnothing$, 即

$$\sigma_{\mathrm{e}}(T_1+T_2)=\sigma_{\mathrm{e}}((T_1+T_2)_{[X,\infty)})=\varnothing.$$

这就说明了算子 T_1+T_2 的谱是离散的. 又因为 T_1+T_2 是自共轭算子, 故 T_1+T_2 的预解算子是全连续的, 即引理 6.5.2 的条件 (d) 亦满足.

综上所述, T_{10}, T_{20}, T_0 满足引理 6.5.2 的条件 (a)~(d), 所以 T_0 的闭扩张 $\widetilde{T_0}$ 的预解算子是全连续的, 即 $\widetilde{T_0}$ 的谱是离散的, $\sigma_{\mathrm{e}}(\widetilde{T_0})=\varnothing$; 而且 T_0 的任意 J 自共轭扩张算子 T 的本质谱是空集, $\sigma_{\mathrm{e}}(T)=\varnothing$, 即 T 的谱是离散的. □

6.5.2 一项高阶自共轭微分算子谱是离散的充分条件

关于 $2n$ 阶一项自共轭微分算子谱的离散性, 早在 20 世纪 50 年代 V. A.Tkachenko 和 I. M.Glazman 作了研究, 得到了一项自共轭微分算子的谱是离散的充分条件. 20 年后, R.T.Lewis 证明了谱是离散的必要条件 (参阅 [59]).

用 L 表示微分算式

$$ly=(-1)^n(r(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0 \tag{6.5.24}$$

的任意自共轭扩张, 其中 $r(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的实函数 $r(x)>0$, $\forall x\geqslant 0$.

定理 6.5.9 下半有界的一项自共轭微分算子 L 的谱是离散的充分必要条件:

$$\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^{\infty}r^{-1}(t)\mathrm{d}t=0.$$

本节主要研究在 (6.5.24) 中, 当系数是复值函数时, (6.5.24) 所生成微分算子的谱是离散的充分条件, 设

$$\tau y=(-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0, \tag{6.5.25}$$

其中 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $\forall x\geqslant 0$, 也就是研究 (6.5.25) 所生成微分算子的谱是离散的充分条件.

定理 6.5.10 如果 (6.5.25) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x),\forall x\geqslant 0$ 满足

$$p_1(x)>0,\ p_2(x)>0,\quad \forall x\in[0,\infty);$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^\infty\frac{1}{p_1(t)+p_2(t)}\mathrm{d}t=0,\tag{6.5.26}$$

则算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的.

证明 对 (6.5.25) 进行分解,

$$\tau_1y=(-1)^n(p_1(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0,$$

$$\tau_2y=(-1)^n(p_2(x)y^{(n)})^{(n)},\quad x\geqslant 0.$$

设 T_{10},T_{20},T_0 是分别由微分算式 τ_1,τ_2,τ 生成的最小算子, 即

$$T_{10}f=\tau_1(f),\quad \forall f\in\mathfrak{D}(T_{10})=C_0^\infty[0,\infty)\tag{6.5.27}$$

$$T_{20}f=\tau_2(f),\quad \forall f\in\mathfrak{D}(T_{20})=C_0^\infty[0,\infty),\tag{6.5.28}$$

$$T_0f=\tau(f),\quad \forall f\in\mathfrak{D}(T_0)=C_0^\infty[0,\infty).\tag{6.5.29}$$

下面只需证明 T_{10},T_{20},T_0 满足引理 6.5.2 的条件 (a)~(d) 即可.

由 (6.5.27)、(6.5.28) 和条件 (1) 可知: T_{10},T_{20} 是对称的, 稠密的, 而且 $\mathfrak{D}(T_{10})=\mathfrak{D}(T_{20})$, 对 $\forall y\in\mathfrak{D}(T_{10})=\mathfrak{D}(T_{20})$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(T_0y,y)=(T_{10}y,y)&=\int_0^\infty(-1)^{(n)}(p_1y^{(n)})^{(n)}\bar{y}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty p_1|y^{(n)}|\mathrm{d}x\geqslant 0,\end{aligned}\tag{6.5.30}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T_0y,y)=(T_{20}y,y)&=\int_0^\infty(-1)^{(n)}(p_2y^{(n)})^{(n)}\bar{y}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty p_2|y^{(n)}|\mathrm{d}x\geqslant 0,\end{aligned}\tag{6.5.31}$$

所以 T_{10},T_{20} 也是下半有界的; 说明了 T_{10},T_{20} 满足引理 6.5.2 的条件 (a) 和 (b). 由 (6.5.27)、(6.5.28) 及 (6.5.30)、(6.5.31) 可知 $T_0=T_{10}+\mathrm{i}T_{20}$, T_0 的正则集非空, 对于任何 $\lambda\,(\mathrm{Re}\lambda<0)$, $\lambda\in\rho(T_0)$; 从而对任意 $\lambda\,(\mathrm{Re}\lambda<0,\lambda\in\rho(T_0))$, 集合 $\mathcal{R}(T_{10}+\mathrm{i}T_{20}-\lambda I)$, $(\mathcal{R}(T_{10}-\mathrm{i}T_{20}-\lambda I))$ 在 Hilbert 空间 $L^2[0,\infty)$ 内是稠密的; 说明了 T_{10},T_{20} 满足引理 6.5.2 的条件 (c). 令

$$Ly=(T_{10}+T_{20})y=(\tau_1+\tau_2)y=(-1)^n((p_1+p_2)y^{(n)})^{(n)},\quad \forall y\in\mathfrak{D}(T_{10})=\mathfrak{D}(T_{20}),$$

则 $L=T_{10}+T_{20}$ 是对称的, 稠定下半有界算子; 利用条件 (2) 得: $L=T_{10}+T_{20}$ 的任何自共轭扩张的谱是离散的. 从而根据引理 6.5.2 得: $L=T_{10}+T_{20}$ 的任何自共轭扩张的预解算子是全连续的; 说明了 T_{10}, T_{20} 满足引理 6.5.2 的条件 (d).

由上述讨论可知: T_{10}, T_{20}, T_0 满足引理 6.5.2 的条件 (a)~(d), 而且 T_0 的正则集非空, 利用引理 6.5.2 得: 对于 T_0 的任意 J 自共轭扩张 T, 当 $\lambda\in\rho(T)$ 时, $(T-\lambda I)^{-1}$ 是全连续算子, 算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的. □

推论 6.5.11 如果 (6.5.25) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x), \forall x\geqslant 0$ 满足

$$p_1(x)>0, p_2(x)>0,\quad \forall x\in[0,\infty),$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^\infty\frac{1}{p_1(t)}\mathrm{d}t=0,\tag{6.5.32}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^\infty\frac{1}{p_2(t)}\mathrm{d}t=0,\tag{6.5.33}$$

则算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的.

定理 6.5.12 如果 (6.5.25) 的系数 $p(x)=p_1(x)+\mathrm{i}p_2(x)$, $\forall x\geqslant 0$ 满足

$$\lim_{x\to\infty}p_1(x)>0,\quad \lim_{x\to\infty}p_2(x)>0,\tag{6.5.34}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{2n-1}\int_x^\infty\frac{1}{p_1(t)+p_2(t)}\mathrm{d}t=0,\tag{6.5.35}$$

则算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的.

证明 利用算子直和分解的办法, 根据 (6.5.21), 存在充分大的 $N>0$, 使得

$$p_1(x)>0,\ p_2(x)>0,\quad \forall x\in[N,\infty).$$

这样把算子 T_0 分成两个算子 $T_{0[0,N]}$ 与 $T_{0[N,\infty)}$ 的直和, 而 $T_{0[0,N]}$ 是一个正则算子, 它的谱是离散的; 类似定理 6.5.10 的方法得到 $T_{0[N,\infty)}$ 的谱也是离散的; 从而得到算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的. □

根据定理 6.5.10 的证明过程可有下面结论:

定理 6.5.13 如果 (6.5.15) 的系数 $p(x)=ax^\alpha+\mathrm{i}bx^\beta$, $\forall x\geqslant 0$, 满足: a, b 是实数, 并且

$$a,\, b>0,\quad \max\{\alpha,\beta\}>2n,$$

则算子 T_0 的任何 J 自共轭扩张的谱是离散的.

定理 6.5.10 和定理 6.5.12 的必要性目前尚未见到相应的结果.

参 考 文 献

[1] Birmann M S, Solomjak M Z. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Spaces. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987
[2] 曹之江. 常微分算子. 上海: 上海科学技术出版社, 1987
[3] 曹之江, 孙炯. 微分算子文集. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1992
[4] Chatelin F. Spectral Approximation of Linear Operators. New York: Academic Press, 1983
[5] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004
[6] Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955
[7] Conway J B. A Course in Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1990
[8] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators, Part II. New York: Interscience Pub, 1963
[9] Edmunds D E, Evans W D. Spectral Theory and Differential Operators. Oxford: Oxford University Press, 1987
[10] Friedrichs K O. Spectral Theory of Operators in Hilbert Spaces. New York: Springer-Verlag, 1973
[11] Glazman I M. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965
[12] Goldberg S. Unbounded Linear Operators: Theory and Application. New York: McGraw-Hill, 1966
[13] Helson H. The Spectral Theorem, Lecture Notes in Mathematics 1227. Heidelberg: Springer-Verlag, 1986
[14] Hislop P D, Sigal I M. Introduction to Spectral Theory: With Application to Schrödinger Operators. New York: Springer-Verlag, 1996
[15] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析. 北京: 高等教育出版社, 1998
[16] Kauffman R M, Read T T, Zettl A. The Deficiency Index Problem for Powers of Ordinary Differential Expressions, Lecture Notes in Mathematics 621. Heidelberg: Springer-Verlag, 1977
[17] Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley & Sons, 1978
[18] Lang S. Real and Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1993
[19] 刘炳初. 泛函分析. 北京: 科学出版社, 2000
[20] 刘景麟. 常微分算子谱论. 北京: 科学出版社, 2009
[21] Müller-Pfeiffer E. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators. Ellis Horwood Limited, Chichester, West Sussex, 1981
[22] Naylor A W, Sell G R. Linear Operator Theory in Engineering and Science. New York:

Springer-Verlag, 1982

[23] Naimark M A. Linear Differential Operators. London: Harrap, 1968

[24] Rudin W. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill, 1991

[25] 孙炯, 王万义, 赫建文. 泛函分析. 北京：高等教育出版社, 2010

[26] Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1980

[27] Weidmann J. Linear Operators in Hilbert spaces. New York: Springer-Verlag, 1980

[28] Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in Mathematics 1258. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987

[29] Yosida K. Function Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995

[30] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析. 北京: 北京大学出版社, 1995

[31] Schechter M.Operator methods in quantum mechanics, Elsevier, North Holland, Inc. 1981

[32] 汪林. 泛函分析中的反例. 北京: 高等教育出版社, 1994

[33] 王忠, 傅守忠. 线性算子谱理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2013

[34] Zettl A. Sturm-Liouville theory. American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, v. 121, 2005

[35] An J Y, Sun J. On the self-adjointness of the product operators of two mth-order differential operators on $[0, +\infty)$. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2004, 5(20): 793~802

[36] 曹之江, 刘景麟. 奇异对称常微分算子的亏指数理论, 数学进展, 1983, 3(12): 161~178

[37] Cao Z J. On Self-adjoint domains of 2-nd order differential operators in limit-circle case. Acta Mathematica Sinica, English Series, 1985, 3(1): 175~180

[38] 曹之江. 高阶极限圆型微分算子的自伴扩张. 数学学报, 1985, 2(28): 205~217

[39] 曹之江. 经典 Sturm-Liouville 理论的完备和衍生. 数学进展, 1993, 22(2): 97-117

[40] Cao Z J, Sun J, Edmunds D E. On self-adjointness of the product of two 2-order differential operators. Acta Mathematica Sinica, English Series, 1999, 15(3): 375~386

[41] Edmunds D E, Kufner A, Sun J. Extension of functions in weighted Sobolev spaces. Rend.Accad.Naz.XL Mem.Mat, 1990, 17(16): 327~339

[42] Edmunds D E, Sun J. Approximation and entropy numbers of Sobolev embedding over domains with finite measure. Ouart. J. Math. Oxford, 1990, 2(41): 385~394

[43] Edmunds D E, Sun J. Approximation and entropy numbers of embedding in weighted Orlicz spaces. Mathematica Bohemica, 1991, 3(116): 281~295

[44] Edmunds D E, Sun J. Embedding theorems and the spectra of certain differential operators. Proc.R.Soc.Lond.A, 1991, 434: 643~656

[45] Everitt W N, Markus L. Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. Mathematical Surveys and Monographs 61. American Math. Soc., 1999

[46] Müller-Pfeiffer E, Sun J. On the discrete spectrum of ordinary differential operators in weighted function spaces. Journal for Analysis and Its Application, 1995, 3(14): 637~646

[47] Shang Z J. On J-self-adjoint extensions of J-symmetric ordinary differential operators. J. Diff. Equat., 1988, 1(73): 153~177

[48] Sun J. On the self-adjoint extensions of symmetric ordinary differential operators with middle deficiency indices. Acta Mathematica Sinica, English Series, 1986, 2(2): 152~167

[49] 孙炯, 王忠. 常微分算子谱的定性分析. 数学进展, 1995, 5(24): 406~422

[50] Sun J. On the spectrum of a class of differential operators and embedding theorems. Acta Mathematica Sinica, English Series, 1994, 4(10): 415~427

[51] 王万义. 微分算子的辛结构与一类微分算子的谱分析. 博士论文, 内蒙古大学, 2002

[52] Wang W Y, Sun J. Complex J-symplectic geometry characterization for J-symmetric extensions of J-symmetric differential operators. 数学进展, 2003, 4(32): 481~484

[53] 王忠. 高阶微分算子谱是离散的一个充分必要条件. 系统科学与数学, 2000, 2(20): 224~227

[54] 王忠. 复系数 $2n$ 阶微分算子的谱. 数学学报, 2000, 5(43): 787~796

[55] 王忠, 孙炯. 一类极限点型的 J- 对称微分算子. 数学学报, 2000, 3(43): 481~486

[56] 王忠, 孙炯. Euler 微分算子谱是离散的充分必要条件. 系统科学与数学, 2001, 21(4): 497~506

[57] 王忠, 孙炯. J- 自共轭微分算子谱的定性分析. 数学进展, 2001, 5(30): 405~413

[58] 王忠. 一类自伴微分算子谱的离散性. 数学学报, 2001, 1(44): 95~102

[59] 王忠. 非自伴微分算子谱的定性分析. 博士学位论文, 内蒙古大学, 1999

索　引

M

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其他

(O−6033.31)

科学数理分社
电　话：(010) 64010624
E-mail：wangliping@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



定　价：128.00 元